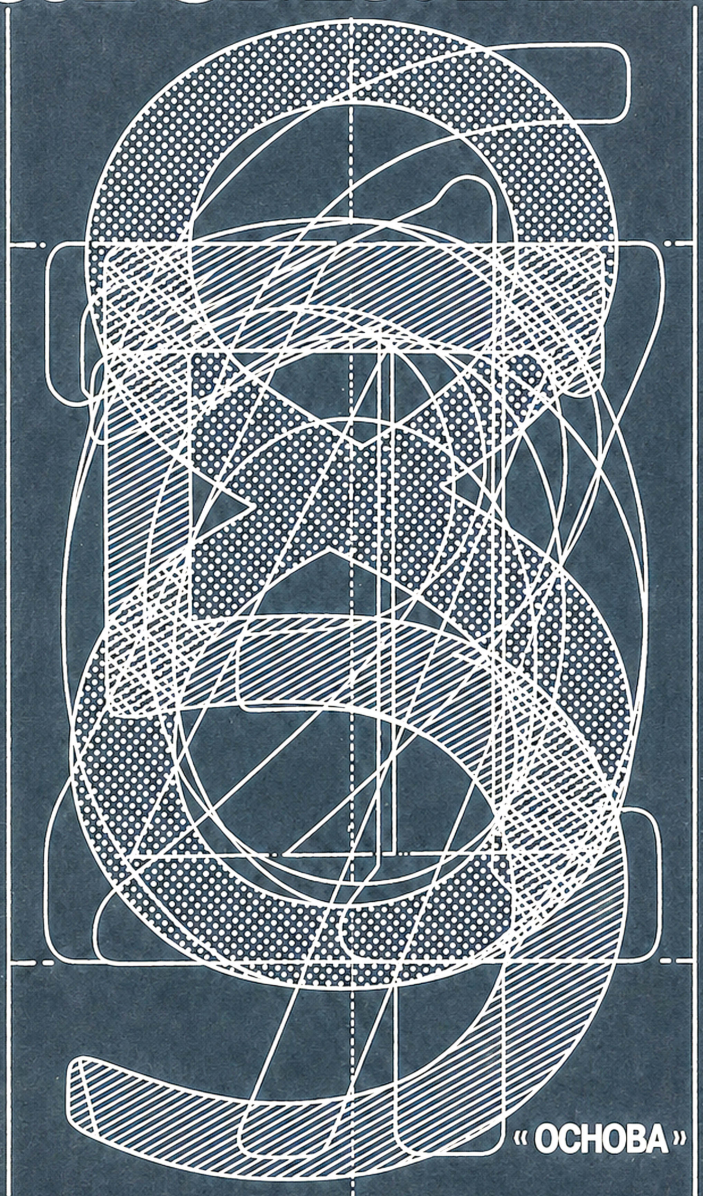
Методика викладання математики



«ОСНОВА»

МЕТОДИКА ВИКЛАДАННЯ **МАТЕМАТИКИ** в середній школі

Допущено
Міністерством освіти СРСР
як навчальний посібник
для студентів педагогічних інститутів,
які навчаються за спеціальностями 2104
«Математика» і 2105 «Фізика»

Упорядники: Р. С. ЧЕРКАСОВ, А. А. СТОЛЯР

ХАРКІВ
ВИДАВНИЦТВО «ОСНОВА»
ПРИ ХАРКІВСЬКОМУ
ДЕРЖАВНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ
1992

ББК 22.1я73
М54

Автори: *О. Я. Блох, Є. С. Канін, Н. Г. Килина, В. Й. Крупич, М. Г. Лускіна, І. А. Павленкова, В. С. Семаков, А. А. Столяр, М. О. Терьошин, Р. С. Черкасов, Н. І. Чиканцева*

Рецензенти: д-р пед. наук проф. *С. І. Архангельський* (МДПІ), канд. пед. наук доц. *С. Г. Первухіна* (УПІ)

Переклав з російської мови проф. *Я. М. Жовнір* за виданням: Методика преподавания математики в средней школе / Сост. *Р. С. Черкасов, А. А. Столяр*. М.: Просвещение, 1985.

М54 Методика викладання математики в середній школі: [Навч. посібник для пед. ін-тів за спец. 2104 «Математика» і 2105 «Фізика» : Пер. з рос. / О. Я. Блох, Є. С. Канін, Н. Г. Килина та ін.]; Упоряд. Р. С. Черкасов, А. А. Столяр.— Х.: Вид-во «Основа» при Харк. ун-ті. 1992.— 304 с.: іл.
ISBN 5-11-001061-7

Розглянуто питання методичної підготовки майбутнього вчителя математики до дидактично обгрунтованого викладання предмету в середній школі та технікумі.

Для студентів педагогічних вузів, які навчаються за спеціальностями «Математика», «Фізика».

М $\frac{4306010500\text{-}032}{226\text{-}92}$ 21а-91

ББК 22.1я73

ISBN 5-11-001061-7

© Видавництво «Просвещение», 1985
© Переклад на українську, Я. М. Жовнір, 1992

ЗМІСТ

Передмова 5

Розділ 1

Загальні питання методики викладання математики в середній школі 6

§ 1. Предмет методики викладання математики 6
§ 2. Цілі навчання математики в середній загальноосвітній школі. Значення шкільного курсу математики в загальній освіті 6
§ 3. Зміст шкільного курсу математики 12
§ 4. Питання політехнічної освіти в навчанні математики 16

Розділ 2

Принципи дидактики в навчанні математики 19

§ 1. Принципи навчання як категорії дидактики 20
§ 2. Принцип виховання особистості 21
§ 3. Принцип науковості 22
§ 4. Принцип свідомості, активності і самостійності 23
§ 5. Принцип систематичності і послідовності 26
§ 6. Принцип доступності 27
§ 7. Принцип наочності 27
§ 8. Принцип індивідуального підходу до учнів 29
§ 9. Принцип міцності знань 30

Розділ 3

Математичні поняття, висловлення і доведення 32

§ 1. Математичні поняття 33
§ 2. Математичні висловлення 47
§ 3. Математичні доведення 59

Розділ 4

Методи навчання математики

§ 1. Проблема методів навчання 73
§ 2. Емпіричні методи: спостереження, дослід, вимірювання 78
§ 3. Порівняння і аналогія 82
§ 4. Узагальнення, абстрагування і конкретизація 87
§ 5. Індукція 94
§ 6. Дедукція 99
§ 7. Аналіз і синтез 106
§ 8. Методи проблемного навчання 113
§ 9. Особливості програмованого навчання 125
§ 10. Спеціальні методи навчання математики 129

Розділ 5

Роль задач у навчанні математики. Навчання загальним методам розв'язування задач

§ 1. Значення навчальних математичних задач 134
§ 2. Роль задач у процесі навчання математики 135
§ 3. Навчання математики через задачі 148

§ 4. Загальні методи навчання розв'язуванню математичних задач . . . 151
§ 5. Організація навчання розв'язуванню математичних задач 166

Розділ 6

Організація навчання математики

§ 1. Урок, його структура. Основні вимоги до уроку. Типи уроків . . . 177
§ 2. Підготовка вчителя до уроку. Аналіз уроку 183
§ 3. Організація самостійної роботи при навчанні учнів математики . . 191
§ 4. Повторення 197
§ 5. Попередження неуспішності 202
§ 6. Індивідуалізація і диференціація у навчанні 205
§ 7. Перевірка знань, умінь і навичок учнів з математики 208
§ 8. Специфіка організації навчання математики в школі продовженого дня 219
§ 9. Специфіка навчання математики у вечірній (змінній) середній загальноосвітній школі 224
§ 10. Особливості організації роботи з математики в середніх профтехучилищах 226

Розділ 7

Засоби навчання математики

§ 1. Підручник з математики 231
§ 2. Дидактичні матеріали і довідкова математична література 256
§ 3. Навчальне обладнання з математики та методика використання його в навчальній роботі 241
§ 4. Організація і обладнання кабінету математики 262
§ 5. Деякі питання виготовлення наочних посібників з математики . . . 265

Розділ 8

Питання методики поглибленого вивчення математики

§ 1. Особливості викладання математики в школах і класах з поглибленим вивченням цього предмету 269
§ 2. Факультативні заняття з математики 287
§ 3. Позакласна і позашкільна робота з математики 294

ПЕРЕДМОВА

Навчальний предмет «Методика викладання математики» відноситься до циклу педагогічних дисциплін і вивчається студентами, які вже одержали відповідну філософську, психологічну, загальнодидактичну, логічну і математичну підготовку. Ці знання студентів систематично використовуються в курсі методики викладання математики, конкретизуються і знаходять вихід у практику навчання школярів.

Програма курсу «Методика викладання математики» ділить його на дві частини: «Загальна методика» і «Спеціальна методика». Загальна методика — це конкретизація дидактики з урахуванням специфіки математики як навчального предмета. Вона названа загальною тому, що виробляє на психолого-дидактичній основі загальні методичні ідеї, положення, рекомендації. Спеціальна методика, по суті, представляє собою застосування загальної методики до вивчення конкретних тем шкільного курсу математики.

У навчальному посібнику подано загальну методику викладання математики. В ньому йдеться лише про одне з можливих трактувань побудови курсу загальної методики. Автори прагнули до конкретизації дидактики з можливо повним урахуванням специфіки математики. Крім того, широке ілюстрування загальних методичних ідей і положень конкретними прикладами їх реалізації в шкільному навчанні створює умови переходу від загальної до спеціальної методики.

Передбачається, що вивчення курсу методики в системі дискусійних, семінарських і лабораторних занять проходить в поєднанні з безперервною педагогічною практикою студентів у школі, в процесі якої студенти приймають активну участь в навчально-виховній роботі вчителя.

Посібник написаний у відповідності до програми з методики викладання математики і призначений для студентів математичних і фізико-математичних факультетів педагогічних інститутів.

Робота авторів над змістом посібника розподіляється так: розділ І— Р. С. Черкасов; розділ 2 — В. Й. Крупич; розділи 3, 4 — А. А. Столяр; розділ 5 — Є. С. Канін; розділ 6 — Н. Г. Килина (§ 1, 2), Н. І. Чіканцева (§ 3—6, 8), В. С. Копилов (§ 7, 9), М. О. Терьошин (§ 10); розділ 7 — М. О. Терьошин (§ 1), Є. С. Канін (§ 2), В. С. Семаков (§ 3—5); розділ 8 — М. Г. Лускіна (§ 2), О. Я. Блох, І. А. Павленкова (§ 1, 3).

Автори висловлюють вдячність рецензентам посібника: доктору педагогічних наук професору С. І. Архангельскому, кафедрі методики викладання математики Ульянівського педагогічного інституту (завідуюча кафедрою — доцент С. Г. Первухіна).

РОЗДІЛ 1

ЗАГАЛЬНІ ПИТАННЯ МЕТОДИКИ ВИКЛАДАННЯ МАТЕМАТИКИ В СЕРЕДНІЙ ШКОЛІ

В першому розділі подається коротка характеристика викладання математики, розглядаються питання, в яких висвітлено характерні для курсу шкільної математики загальні підходи до розкриття навчального матеріалу. Ці підходи пов'язані, в першу чергу, з цілями (загальноосвітні, практичні, виховні), які ставляться перед математикою як навчальним предметом. Разом з тим зазначені цілі слід розглядати в органічній єдності навчання і виховання, на досягнення яких орієнтують вчителів завдання шкільної реформи. Тому на першому етапі конкретизації цілей навчання математики в посібнику розглядаються відповідні загальні цілі в тій їх постановці, якої їм надає специфічність математики як навчального предмета. Потім аналізуються співвідношення цілей і методів, які використовуються у викладанні математики в школі, виділяються найбільш суттєві напрями розгортання цього предмету і дається короткий огляд програм з математики. Особлива увага надається проблемі встановлення у навчальному процесі зв'язків між теоретичними знаннями, що є змістом курсу шкільної математики, і можливостями їх застосування на практиці, в трудовій діяльності. Методика викладання математики в наш час інтенсивно розвивається. Не так давно в ній виникло багато проблем, які ще не одержали повного розв'язання. Деякі з них ми відмічаємо, оскільки вчителю математики доведеться мати справу з ними в своїй практичній роботі і він повинен бути готовим до самостійних пошуків відповіді на конкретні питання і до їх розв'язання в світлі вимог часу.

§ 1. ПРЕДМЕТ МЕТОДИКИ ВИКЛАДАННЯ МАТЕМАТИКИ

Методика викладання математики — це наука про математику як навчальну дисципліну і про закономірності процесу навчання математики учнів різного віку. В своїх дослідженнях і висновках вона спирається на філософію, педагогіку, психологію, математику і узагальнений практичний досвід роботи вчителів математики.

Згідно загальної мети навчання перед методикою викладання математики стоять такі основні завдання:

1. Визначити конкретну мету вивчення математики і зміст навчального предмету середньої школи.

2. Розробити найбільш раціональні методи і організаційні форми навчання, спрямовані на досягнення поставленої мети.

3. Розглянути необхідні засоби навчання і розробити рекомендації щодо їх застосування в практиці роботи вчителя.

Іншими словами, методика математики* повинна дати відповіді на такі три питання:

* Термін «методика математики» часто застосовується для скорочення термінів «методика викладання математики», «методика навчання математики».

1. Для чого треба вивчати математику?
2. Чого навчати учнів?
3. Як навчати?

Зміст методики математики становлять питання її загальних теоретичних основ (загальна методика математики) і питання вивчення окремих розділів, тем курсу (часткова, або спеціальна, методика математики).

Методика викладання математики сформувалась як самостійна наука в другій половині XIX ст. Основним предметом її досліджень в ті часи стали питання, пов'язані з навчанням математики дітей молодшого шкільного віку, що було викликано потребами суспільства в досить широкому розвитку шкільної початкової освіти. Питання методики навчання математики дітей середнього і старшого шкільного віку стало предметом активних методичних досліджень за останні роки XIX ст. і набуло широкого розвитку протягом наступних десятиріч.

З методичної спадщини вітчизняної методики викладання математики назвемо найважливіше.

Першими в нашій країні науковими дослідженнями з методики математики, які потім були продовжені, стали праці члена Петербурзької Академії наук Семена Омеляновича Гур'єва (1760—1813). В розробленому ним проекті реформи викладання математики в Морському кадетському корпусі С. О. Гур'єв вперше ставив (і розв'язував) ряд питань загальної методики.

Цінний вклад у формування методики викладання математики вніс Микола Іванович Лобачевський (1792—1856). Свої загальні методичні погляди він сформулював у передмові до книги «Алгебра або обчислення скінченних», що вийшла в 1834 р. «... В поступовому розвитку понять і в умінні не допускати, щоб одне вивчення напам'ять загальних правил і механічні обчислення заміняли судження, полягає мистецтво викладання і успіх його», — писав М. І. Лобачевський.

Визначну роль в подоланні характерних для першої половини і середини XIX ст. догматичних методів викладання математики в початковій школі відіграла методична діяльність Іллі Миколаєвича Ульянова (1831—1886) та Льва Миколаєвича Толстого (1828—1910). І. М. Ульянов намагався звільнити викладання математики в початковій школі від механічного заучування. Л. М. Толстой не тільки написав оригінальний підручник арифметики, але і вперше у вітчизняній практиці організував порівняльний експеримент з вивчення в початковій школі арифметики старим і запропонованим в його підручнику новим методами. Однак об'єктивне підведення підсумків експерименту було зірвано через розв'язане реакційними колами цькування великого письменника, яке закінчилось відлученням його від церкви.

В умовах сьогодення не втратили свого значення методичні праці Олександра Івановича Гольденберга (1837—1902), особливо його книги «Методика початкової арифметики» та «Бесіди з обчислень».

Видатними методистами-математиками, які почали свою діяльність в дореволюційній Росії, були Семен Ілліч Шохор-Троцький

(1853—1923) і Костянтин Феофанович Лебединцев (1878—1925); перший з них розробив «метод доцільних задач»*, другий — обґрунтував «конкретно-індуктивний метод»** викладання алгебри.

Кращі із створених в дореволюційний час навчальних посібників з математики одержали належне визнання і використовувались протягом багатьох років в радянській школі. Найбільший успіх мали книги «Арифметика», «Елементарна алгебра», «Елементарна геометрія», написані Андрієм Петровичем Кисельовим (1852—1940), які стали в 1934—1955 рр. (після їх перероблення) стабільними шкільними підручниками.

Багато проблем, які виникають в методиці математики, знаходять своє розв'язання лише після багаторічних пошуків. Це пояснюється їх складністю, взаємозв'язком особливостей процесу навчання математики з дослідженнями в галузі шкільної психології, дидактики, які закріплені традиціями досвіду викладання математики. Ці традиції в багатьох відношеннях мають глибокі зв'язки з історією науки.

В методиці викладання математики, в практиці навчання предмету знаходять своє відображення особливості багаторічної історії розвитку математики від сивої давнини до наших днів. Виділяють чотири основних періоди її розвитку***:

1. Період зародження математики, характерний первісним нагромадженням фактів.

2. Період елементарної математики. Початок цього періоду встановили старогрецькі математики (IV—V ст. до н. е.).

3. Період створення математики змінних величин (XVII—XVIII ст.)

4. Сучасний період (XIX—XX ст.).

Учителю математики необхідно ознайомитися із книгами з історії математики, в яких подано цікавий фактичний матеріал. Це допоможе не лише краще розуміти історію виникнення і розвитку навчального предмету, але і вибрати для повідомлення учням повчальні приклади напруженої, часто героїчної боротьби за науковий світогляд проти метафізичних уявлень. Не менш цікава і необхідна для глибокого розуміння методичних закономірностей історія розвитку методики викладання математики. Найбільш важливими у вітчизняній історії цієї науки є такі періоди:

1. Період руху за реформу математичної освіти в кінці XIX — початку XX ст. Цей період найбільш чітко відображений в матеріалах I і II Всеросійських з'їздів викладачів математики (1912, 1914 рр.).

---

* Найбільш повно методичні ідеї С. І. Шохор-Троцького викладені в його книзі «Методика викладання арифметики» (Л., 1925).

** К. Ф. Лебединцев є автором першого методичного посібника, в якому знайшов своє відображення досвід роботи радянської школи: «Вступ до сучасної методики математики» (М., 1925).

*** Докладний опис кожного з цих періодів подано у статті А. М. Колмогорова «Математика» (Математическая энциклопедия. М.: Сов. энциклопедия, 1982. Т. 3).

2. Період становлення і формування методики викладання математики в радянській єдиній трудовій політехнічній школі (1917—1922). В ці роки було розроблено принципи радянської дидактики, знайдено підходи до розв'язання методичних проблем.

3. Період сучасної реформи математичної освіти, зумовлений вимогами науково-технічної революції, зростаючої ролі математики і шкільної математичної освіти в сучасних умовах, завданням підготовки підростаючого покоління до активної трудової діяльності в суспільстві.

§2. ЦІЛІ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ В СЕРЕДНІЙ ЗАГАЛЬНООСВІТНІЙ ШКОЛІ. ЗНАЧЕННЯ ШКІЛЬНОГО КУРСУ МАТЕМАТИКИ В ЗАГАЛЬНІЙ ОСВІТІ

Середня загальноосвітня школа покликана готувати високоосвічених, всебічно розвинених, активних будівників демократичного суспільства, вихованих на ідеях гуманізму, здібних до творчої праці в різних галузях господарчого і соціально-культурного будівництва, які люблять рідну Батьківщину.

Свій внесок в досягнення цієї високої мети вносить і та підготовка, яку одержують учні в процесі вивчення шкільного курсу математики на протязі всіх років навчання. Жоден інший предмет, крім рідної мови та літератури, не займає такого місця в шкільному навчанні, як математика. Це пояснюється тим значенням, якого набула ця стародавня, але вічно молода наука в житті сучасного суспільства.

В епоху науково-технічної революції широке розповсюдження математичних знань, залучення до них молоді, яка після закінчення середньої школи розпочинає трудову діяльність в найрізноманітніших галузях науки і виробництва, стає органічною потребою. Більшість провідних професій в промисловості і сільському господарстві вимагають від майбутніх робітників, спеціалістів різного профілю багатьох умінь, навичок і знань з математики та її застосування. Математика набуває все більшого значення в інших науках, а також широко використовується при розв'язанні завдань науково-технічного прогресу, особливо тих, що стосуються нових галузей техніки.

В сучасних умовах певний обсяг математичних знань, добре володіння математичними методами і деяке знайомство з специфічною мовою математики стали обов'язковим елементом загальної культури.

Навички розумової діяльності, що їх одержують учні в процесі правильно організованого навчання математики, формування в процесі вивчення предмету готовності до наполегливої праці, до подолання труднощів, будуть необхідні їм в майбутньому, незалежно від того, яку професію обере кожен з них або почне набувати після закінчення середньої школи.

Важливим завданням навчання математики в середній школі є підготовка учнів до продовження освіти у вищій школі з спеціальностей, які вимагають подальшого вивчення математики та її практичного використання, виховання в них прагнення до безперервного поповнення своїх знань з обраного напрямку шляхом самоосвіти.

Таким чином, підготовка учнів середньої школи до активної участі в різних сферах народного господарства країни вимагає: 1) оволодіння учнями певним обсягом математичних знань, умінь і навичок; 2) формування в процесі навчання предмету наукового світогляду, високих загальнолюдських цінностей, розвитку інтелектуальних сил і здібностей учнів, готовності їх до праці.

Шляхи і засоби досягнення мети вивчення математики в радянській середній загальноосвітній школі розкриваються в курсі методики викладання математики.

Ці питання будуть розглянуті в посібнику і одержать свою конкретизацію при аналізі шкільних програм, змісту підручників і навчальних посібників з математики, методів викладання основних розділів курсу і організації навчальної роботи. Але перш ніж почати таке докладне вивчення, треба подати деякі загальні пояснення, які відносяться до взаємозв'язку мети навчання математики в середній школі і змісту предмета.

Визначаючи обсяг математичних знань, умінь і навичок, якими повинен володіти випускник середньої школи, необхідно враховувати не лише ті вимоги, які ставить теперішнє життя, а й вимоги, які будуть поставлені перед поколінням сучасних школярів в їх майбутній діяльності через два-три десятиріччя.

Ці перспективні вимоги відображають те нове, що підготовлено для суспільства розвитком наукових знань та їх застосувань. Однак шкільний курс не може зазнавати безперервних швидких змін, здатних в достатній мірі враховувати все нові й нові вимоги. Кожне поновлення шкільного курсу математики вимагає всебічної підготовки.

Необхідно чимало часу, щоб знайти правильні педагогічні і психологічні підходи до введення в обов'язковий шкільний курс нових розділів, які відображають досить сталі нові наукові ідеї і методи і без сумніву мають цінність для загальної освіти. При цьому треба мати на увазі, що користь математичних знань полягає не тільки в розумінні і пізнанні закономірностей реально існуючого світу, але і в можливості їх безпосереднього застосування при вивченні інших наук та в повсякденній життєвій практиці, де доводиться мати справу з питаннями виміру, порядку, просторового розміщення.

Кожний предмет, що вивчається в школі, своїми засобами забезпечує виконання поставлених перед шкільною освітою загальних завдань. Це ставить до викладання вимоги, які виходять за межі конкретного курсу. Наприклад, у школі не вивчається логіка як окремий предмет. Завдання логічного розвитку учнів і вивчення елементів логіки покладені на природничонаукові та гуманітарні дисципліни.

Математика, як ніякий інший предмет, що вивчається в школі, має можливості на кожному кроці вчити учнів логіці на практиці. В процесі засвоєння математичних знань розв'язується завдання розвитку в учнів навичок виконання логічних міркувань і характерних для дедуктивного мислення умінь знаходити логічні наслідки з даних початкових умов, здібностей до абстрагування, тобто вміння виділяти в конкретній ситуації суть питання, залишаючи осторонь несуттєві деталі. Вивчаючи математику, учні набувають умінь аналізувати

питання, яке розглядається, узагальнювати, спеціалізувати, виділяти необхідні і достатні умови, означати поняття, складати судження, знаходити шлях розв'язання тієї чи іншої задачі. Все це сприяє формуванню в учнів мислення, розвитку їх мови і особливо таких якостей висловлення думки, як порядок, точність, ясність, короткість,обгрунтованість.

Вивчення математики вимагає від кожного учня великих зусиль і чималого часу. Одержані при цьому навички навчальної праці сприяють випускникам середньої школи в їх подальшому житті, ефективно опановувати навичками виконання інших видів праці і з відповідним розумінням відноситися до того, що сумлінне, добре виконання будь-якої роботи вимагає значних зусиль і відповідальності.

При умові правильно поставленого навчання в учнів розвиваються спостережливість, увага і зосередженість, ініціатива і наполегливість, розуміння важливості колективної праці та повага до праці своїх товаришів. Все це має велике значення для морального виховання учнів, формування їх характеру.

Вивчення математики дає учням правильне діалектико-матеріалістичне розуміння питань походження і розвитку математичних понять і методів. Учні одержують уявлення про місце математики в системі наук та її ролі в сучасному суспільстві, в розвитку науки, техніки, виробництва.

Використання в навчальному процесі фактів з історії математики та з сучасного життя в доступній для учнів формі допомагає розкрити матеріалістичну основу походження наукових знань, на яскравих прикладах показати пізнання явищ реального світу. Разом з тим вивчення математики сприяє розумінню закономірностей світу, розвиває інтерес учнів набувати наукового погляду на процеси розвитку природи і суспільного життя, підготовлює їх до свідомого засвоєння світоглядних питань при вивченні суспільствознавства і вносить свій вклад у формування наукового світогляду учнів.

Розвиток суспільних відношень, науки і виробництва створює безпосередній вплив як на зміст предмету, так і на цілі вивчення математики.

Одна з характерних особливостей сучасного викладання математики полягає в тому, що в загальній освіті більше уваги приділяється розвитку мислення, мови, мовлення учня, методиці введення нових понять. Розвиток понятійного мислення має саме безпосереднє відношення до загального розвитку і формування наукового світогляду. В зв'язку з цим у викладанні математики виникає ряд дискусійних методичних проблем.

Наприклад, деякі дослідження психологів говорять про те, що найбільш ефективною є така методика вивчення нових математичних понять, коли вони вводяться в навчання досить рано і на більш високому, але доступному для учнів рівні узагальнень. Ця методика виправдала себе в проведених експериментах.

Однак досвід реалізації цих положень в масовій школі, наприклад при введенні загального поняття функції для 12-річних, не дав бажаних результатів і викликав серйозну критику з боку деяких спеціалістів.

Питання про те, коли, на якому етапі навчання і як слід у школі переходити до таких узагальнень, залишається поки що відкритим. Проблема об'єднання в умовах шкільного навчання математики завдань розвитку інтуїції учнів з формуванням навичок дедуктивного мислення є предметом не лише пожвавленого обговорення, але й гострих суперечок.

Загальноматематична мова (найпростіша термінологія, започаткована від теорії множин, математичної логіки, загальної алгебри) широко застосовується в технічних, природничих, гуманітарних науках. Вона потрібна і для самого шкільного курсу математики. Однак щодо питання про те, де, на якому матеріалі і в якому обсязі слід вводити цю мову в школу, існують досить різні погляди.

Ця розбіжність зумовлена тим, що не завжди зрозуміло, чи учні при вивченні матеріалу одержують дійсні знання, чи завдяки широким можливостям дитячої пам'яті йдуть по шляху простого заучування. При навчанні математики завжди треба мати на увазі, що дійсно цінні знання складаються не з того, що учень завчив, а з того, що свідомо засвоїв і чим може користуватися.

Наявність дискусійних питань, які чекають свого розв'язання, викликана різноманітністю потреб практики і можливостей різних методичних підходів до їх розв'язання.

Такі дискусії виправдані і відображають високий інтерес всього суспільства до проблем шкільного навчання. Активним учасником їх обговорення повинен стати вчитель, який на основі власного досвіду доводить правомірність чи переваги тієї чи іншої точки зору.

В своїй практичній роботі з учнями поставленої мети математичної освіти успішно досягає той учитель, який має високу математичну культуру, педагогічний такт, уміє розвивати інтерес учнів до математики, розкриваючи перед ними перспективи, пов'язані з її вивченням, вміє показати математику як науку з широким її застосуванням в багатьох галузях людської діяльності. Тому для студента важливо, опановуючи основи майбутньої професії,доповнювати глибокі знання з математики, педагогічних і суспільних дисциплін навичками дослідницької роботи, вмінням спостерігати, ставити методичні експерименти і робити з них висновки, які дають можливість об'єктивно оцінити результати викладання. Такі навички необхідні для творчого підходу вчителя в педагогічній діяльності, для постійного пошуку шляхів її удосконалення.

§ 3. ЗМІСТ ШКІЛЬНОГО КУРСУ МАТЕМАТИКИ

Шкільним навчальним планом на вивчення математики з I по XI клас відводиться біля 2000 навчальних годин*. Крім того, додаткові години на вивчення математики передбачено в системі факультативних курсів (VIII—XI класи)**.

---

* Приблизно така ж кількість годин відводиться на вивчення математики в більшості загальноосвітніх закордонних шкіл.

** Значно більше відводиться годин на вивчення математики в школах і класах з математичною спеціалізацією.

Нормативним, обов'язковим для виконання документом, що визначає основний зміст шкільного курсу математики, обсяг знань, рівень умінь і навичок, є навчальна програма з математики.

Навчальна програма школи з математики заснована на принципах відповідності програми основним цілям школи, вона забезпечує наступність у навчанні учнів I—IV класів (початкова школа), V—IX класів (неповна середня школа), X—XI (середня школа).

Учні, які після закінчення неповної середньої школи будуть набувати середню освіту в системі професійно-технічних училищ, в середніх спеціальних учбових закладах, у вечірніх (заочних) школах, повинні одержати математичну підготовку в тому ж обсязі, що й учні, які закінчують середню загальноосвітню школу. Таким чином, усі учні, які одержали середню освіту, мають однакові можливості для продовження освіти.

Передбачений програмою зміст шкільної математичної освіти, не дивлячись на зміни, які в ній відбуваються, протягом тривалого часу зберігає свою основу. Така сталість основного змісту програми пояснюється тим, що математика, набуваючи в своєму розвитку багато нового, зберігає і всі раніше накопичені наукові знання, не відкидаючи їх як застарілі і непотрібні.

Основу («ядро») сучасної програми з математики становлять такі розділи:

1. Числові системи.
2. Величини.
3. Рівняння і нерівності.
4. Тотожні перетворення математичних виразів.
5. Координати.
6. Функції.
7. Геометричні фігури та їх властивості. Вимірювання геометричних величин. Геометричні перетворення.
8. Вектори.
9. Початки математичного аналізу.
10. Основи інформатики та обчислювальних машин.

Кожний з цих розділів має свою історію розвитку як предмет вивчення в середній школі. Для якої вікової категорії, в яких класах, на якому рівні і скільки годин відводиться для вивчення перелічених розділів, визначає програма з математики для середньої школи*. Питання, що стосуються їх вивчення, будуть докладно розглянуті в спеціальній методиці викладання математики. Зараз обмежимося окремими короткими поясненнями.

Розділ «Числові системи» вивчається протягом усіх років навчання. В шкільну програму питання числових систем входили вже давно. Але з плином часу відбувалося помітне зниження віку, в якому учні вивчали теми, що входили в зміст програми, зростала глибина їх

---

* Звичайно, програма публікується новим виданням до початку кожного навчального року, що дозволяє вчителю своєчасно підготуватися до наступних занять.

викладу. В сучасних умовах досліджують можливість включення в програму останньої теми цього розділу — «Комплексні числа».

Вивчення величин в програмах і підручниках з математики не виділено в спеціальний розділ. Але протягом усіх років навчання учні виконують дії з різними величинами в процесі розв'язування задач, особливо тих, які відображають зв'язки курсу математики з предметами природничонаукового, технічного циклів.

Вивченню рівнянь і нерівностей присвячена значна частина всього навчального часу. Особлива значимість цієї теми полягає в широкому застосуванні рівнянь і нерівностей в найрізноманітніших галузях застосування математики. Не так давно систематичне вивчення рівнянь починалось лише з VI класу. Протягом останніх десятиліть знайомство з рівняннями та їх застосуванням у розв'язуванні задач увійшло до курсу математики початкової школи і IV—V класів (за програмами з математики, наприклад 1988—1989 р.), тепер — до курсу математики початкової школи і V—VI класів (починаючи з 1989—1990 навчального року).

Виконання тотожних перетворень, опанування специфічною мовою математики вимагають від учнів не тільки розуміння, але й відпрацювання міцних практичних навичок на досить великій кількості тренувальних вправ. Такі вправи, зміст яких у кожному розділі курсу має свої особливості, виконуються учнями всіх класів.

Координати і функції ввійшли в курс математики середньої школи тільки в першій чверті XX ст. Особливістю сучасного шкільного курсу математики є розширення цих розділів і зростаюча роль методу координат і функцій у вивченні інших тем шкільної програми.

Найбільшої гостроти за останні десятиліття набуло обговорення змісту шкільних курсів, особливо щодо обсягу курса геометрії. Тут в значно більшій мірі, ніж в інших розділах шкільної математики, виникли проблеми співвідношення традиційного змісту і необхідними новими доповненнями. Однак в умовах різних підходів до розв'язання цієї проблеми загальне схвалення одержало введення в курс геометричних перетворень.

Вектори вперше увійшли до курсу геометрії нашої школи тільки в середині 70-х років. Велике загальноосвітнє значення цієї теми, широке практичне використання забезпечили їй загальне визнання. Але питання доступності для всіх учнів викладу цього розділу в шкільних підручниках і застосування векторів до розв'язування сюжетних задач знаходяться поки що на рівні розробки і можуть знайти своє розв'язання лише на основі глибокого аналізу і вивчення результатів шкільного викладання.

Елементи математичного аналізу увійшли до програми радянської загальноосвітньої школи недавно. Введення цих розділів зумовлено їх великою ідейною і прикладною значимістю.

Останній із розділів — основи інформатики і обчислювальної техніки — є відображенням вимог, які стоять перед сучасною математичною підготовкою молоді в зв'язку з широким застосуванням на практиці електронно-обчислювальних машин.

Як відмічалось раніше, нові наукові досягнення, їх розвиток і впровадження в практику зумовлюють перегляд шкільного курсу математики. Відбувається ідейне і прикладне збагачення курсу. Крім того, із змісту шкільного навчання виключаються менш значимі розділи і замість них вводяться нові, які набувають більш високої теоретичної і практичної цінності. З розвитком математики та її застосувань зростає число розділів, включення яких у шкільний курс чекає на відповідне обгрунтування. Та можливості загальної середньої освіти обмежені як терміном навчання, так і межами розумного навчального навантаження учнів. Вже зараз зрозуміло, що для загальної середньої освіти важливо мати в курсі середньої школи елементи теорії імовірності, статистики, що важливо будувати шкільний курс так, щоб учні були підготовлені до сприймання нових аспектів прикладної математики. Однак ці питання, які назріли, виявилися досить складними для їх практичної реалізації. Можливі форми введення деяких нових розділів в обов'язковий курс математики середньої школи поки що не знайдені. В зв'язку з цим обговорюється питання про те, що саме з прикладної математики повинно ввійти в шкільне навчання ближчим часом. Разом з тим висловлюється і така думка, що в програму не треба вводити спеціальних розділів прикладної математики, а йти по шляху включення таких старанно відібраних задач, що їх розв'язування приводить до розгляду ситуацій, які потрібно математизувати, щоб прийти потім до математичної моделі. Таким чином, передбачається встановити тісний взаємозв'язок теоретичного змісту математичної освіти з практикою застосування учнями набутих математичних знань.

Поки що всі ці і ряд інших, важливих у своєму прикладному значенні розділів математики, вивчаються в шкільних факультативах, гуртках. Неважко помітити, що в плином часу зміст шкільного курсу математичної освіти розширюється. Виникає питання: яким чином зростаючий обсяг шкільного курсу математики можна вивчати протягом часу, що відводиться програмою?

Як показує історія розвитку шкільної математичної освіти, це можна виконати за таких умов: 1) узагальнення (генералізації) понять, фактів, яке відбувається під час вивчення того чи іншого предмету; 2) використання математичних знань та їх застосувань у повсякденній практиці, що сприяє попередньому ознайомленню дітей в їх життєвому досвіді з поняттями, які підлягають вивченню; 3) удосконалення методів та засобів навчання.

Введення в зміст шкільного курсу основних розділів стане можливим, якщо кожна з перелічених умов буде врахована в достатній для цього мірі. Виділене ядро шкільного курсу математики становить основу його базисної програми, в якій матеріал розміщено не за класами, а за ступенями навчання I—III (I—IV); IV—V (V—VI); VI—VIII (VII—IX); IX—X (X—XI класи) і викладається відповідно логіці розвитку провідних науково-методичних ліній.

Базисна програма обов'язкова для всіх навчальних закладів, що дають середню освіту, вона є для них вихідним документом для доробки тематичних програм. В такій програмі для середньої школи

крім розподілу навчального матеріалу за класами ставляться вимоги до знань, умінь, та навичок учнів, розкриваються міжпредметні зв'язки, примірні норми оцінок. В програмі докладно висвітлюються питання формування наукового світогляду, виховання учнів у процесі навчання.

Щодо змісту математичної освіти, результатів, які треба одержати в процесі навчання, можна виділити такі аспекти:

I_1. Сукупність необхідної для засвоєння і запам'ятовування інформації.

I_2. Система понять, що виводяться одне з другого.

II_1. Сукупність операційних навичок, які набувають учні в процесі навчання.

II_2. Система взаємопов'язаних здібностей.

За останнє десятиліття об'єктом гострих дискусій стали питання про те, яка в сучасних умовах значимість кожного з цих аспектів. Чи не відбувається поступова втрата значимості аспектів I_1 і II_1 при зростаючій значимості для результатів процесу навчання аспектів I_2 і II_2?

Але стає більш очевидною необхідність однаково великої уваги до кожного з цих аспектів, причому кожний з них одержує свій розвиток, набуває нових особливостей.

Порушення цієї вимоги спричиняє негативні наслідки, і перш за все виникнення формалізму в математичній підготовці учнів: знання, які набувають учні, не стають опорою для свідомого оволодіння необхідними практичними навичками; практичні навички, що їх дістають учні, незакріплені знаннями, швидко втрачаються або застосовуються там, де це використання не є необхідним і навіть не має смислу.

§ 4. ПИТАННЯ ПОЛІТЕХНІЧНОЇ ОСВІТИ В НАВЧАННІ МАТЕМАТИКИ

Поставлене перед радянською загальноосвітньою школою завдання політехнічної освіти розв'язується спільними зусиллями вчителів усіх предметів, як у викладанні основ наук, так і на заняттях праці, на виробничій практиці, в системі позакласних занять, суспільно-корисної роботи учнів.

В дисциплінах природничо-математичного циклу політехнічний принцип навчання здійснюється при вивченні явищ і законів природи, а також при ознайомленні учнів з способами і формами застосування цих законів в сучасному промисловому та сільськогосподарському виробництві. Обізнанність учнів з науковими основами сучасного виробництва створює сприятливі умови для набуття майбутньої професії, професійно-технічної підготовки.

Виконання завдань політехнічної освіти ставить такі вимоги до вивчення кожного з природничо-математичних предметів*:

* Вимоги, які тут наводимо, сформульовані в доповіді відомого радянського вченого, фізика-педагога В. Г. Зубова «О программе работ по политехническому образованию», прочитаному на сесії АПН СРСР в 1947 р. (Див.: Воспитание в труде. М.: Педагогика, 1970. С. 76—80).

1. Досить широкий і педагогічно виправданий показ можливостей і форм використання законів природи для потреб людської практики і виробництва.

2. Вибір такої послідовності і форм викладу навчального матеріалу з кожного предмету, який зумовлюється широкими можливостями застосування у всіх галузях людської діяльності.

3. Вибір методів навчання, які максимально стимулюють пізнавальну активність учнів (методи навчання слід оцінювати по тому, як вони формують у школярів уміння поєднувати теоретичні знання з практичною діяльністю).

4. Оптимальний обсяг практичних занять.

5. Ознайомлення учнів на практиці з найпростішими приладами та інструментами і розвиток початкових навичок роботи з ними.

6. Узгоджене з основним навчальним методом ознайомлення учнів з технікою і технологією найближчого до школи виробництва і тих виробництв, на яких проходить їх трудова діяльність.

Названі вимоги показують, що вони стосуються як змісту програми і підручників з кожного предмету, методів навчання, так і організації всієї навчально-виховної роботи школи. Вирішальна роль у реалізації цих вимог належить учителю. Успіх справи залежить від його обізнаності з усіма новинами, що їх дає наука для сучасного виробництва і педагогічно продуманої системи впровадження загальних вимог в практику своєї роботи з учнями.

Зростаюча роль науки в розвитку сучасного виробництва сприяє постійному удосконаленню політехнічної освіти. Зміст політехнічної освіти поповнюється загальноосвітніми знаннями, все більшого значення набувають міжпредметні зв'язки. Широке застосування математики в науковому природознавстві і виробництві створює необхідність грунтовного ознайомлення учнів з її основними прикладними напрямками.

Важливий для вчителя математики матеріал, пов'язаний з ознайомленням учнів з прикладними аспектами математики, можна знайти в книзі А. М. Тихонова і Д. П. Костомарова (Рассказы о прикладной математике. М.: Наука, 1979).

Подаємо перелік вказаних ними основних напрямків:

1. Математичні моделі. 2. Обчислювальні алгоритми. 3. Електронно-обчислювальні машини. 4. Числові методи розв'язування рівнянь. 5. Задачі оптимізації. 6. Лінійне програмування. 7. Визначений інтеграл. 8. Диференціальні рівняння.

З цього переліку видно, що склад математичних знань учнів і принципи їх застосування повинні відображати характерні для нашого часу процеси математизації техніки, економіки, впровадження електронно-обчислювальних машин, що має відкрити нові можливості удосконалення виробництва, керування, підвищення продуктивності праці.

У доступній для учнів формі ці напрямки знаходять своє відображення в процесі вивчення деяких розділів шкільної програми, особливо при розв'язуванні рівнянь і задач, вивченні функцій.

Зрозуміло, що не всі з названих питань можуть бути грунтовно розглянуті (або згадані) на загальнообов'язкових навчальних занят-

тях. Але в системі шкільних факультативів, на позакласних заняттях, в школах і класах з математичною спеціалізацією прикладна математика вивчається з більшою повнотою*.

Політехнічна підготовка, яку набувають учні при вивченні математики та інших предметів, становить основу профорієнтаційної роботи і підготовки до майбутньої трудової діяльності.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Ленин В. И.* Материализм и эмпириокритицизм // Полн. собр. соч. Т. 18.
2. *Ленин В. И.* Задачи союзов молодежи // Полн. собр. соч. Т. 41.
3. *Ленин В. И.* О политехническом образовании // Полн. собр. соч. Т. 42.
4. *О реформе* общеобразовательной и профессиональной школы // Сборник документов и материалов. М.: Политиздат, 1984.
5. *Крупская Н. К.* О политехническом образовании, трудовом воспитании и обучении. М.: Просвещение, 1982.
6. *Луначарский А. В.* Что такое образование? // Луначарский А. В. О воспитании и образовании. М.: Педагогика, 1976.
7. *Андронов И. К.* Полвека развития школьного математического образования в СССР и деятельности советских педагогов-математиков. М.: Просвещение, 1967.
8. *Бевз Г. П.* Методика викладання математики. К. : Вища шк., 1989.
9. *Владимиров В. С., Понтрягин Л. С., Тихонов А. Н.* О школьном математическом образовании // Математика в школе. 1979. № 3.
10. *Воспитание* школьников в процессе обучения математики / Сост. Л. Ф. Пичурин. М.: Просвещение, 1982.
11. *Глейзер Г. И.* История математики в средней школе (IV—VI кл.). М.: Просвещение, 1981.
12. *Глейзер Г. И.* История математики в средней школе. 2-е изд. М.: Просвещение, 1982.
13. *Гнеденко Б. В.* Математическое образование и математика в СССР за 60 лет // Математика в школе. 1982. № 6.
14. *Гнеденко Б. В.* Математика и математическое образование в современном мире. М.: Просвещение, 1985.
15. *Гнеденко Б. В.* Формирование мировоззрения учащихся в процессе обучения математике: Библиотека учителя математики. М.: Просвещение, 1982.
16. *Груденов Я. И.* Психолого-дидактические основы методики обучения. М.: Педагогика, 1987.
17. *Білий Б. М.* Методика викладання математики. Становлення і розвиток в УРСР. К.: Вид-во КТЕІ. 1971.
18. *Бородін О. І., Бугай А. С.* Біографічний словник діячів у галузі математики. К.: Рад. шк., 1973; 1989.
19. *Власенко О. І.* Методика викладання математики. Загальні питання. К.: Вища шк., 1974.
20. *Гельфанд Б. М.* Формування математичних понять у процесі викладання алгебри і початків аналізу. К.: Рад. шк., 1976.
21. *Дубинчук О. С.* Про культуру математичних записів у восьмирічній школі. К.: Рад. шк., 1961.
22. *История* математического образования в СССР. К.: Наук. думка, 1976.
23. *Канторович Л. В., Соболев С. Л.* Математика в современной школе // Математика в школе. 1974. № 4.
24. *Колягин Ю. М.* и др. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика. М. : Просвещение, 1978.
25. *Кудрявцев Л. Д.* Современная математика и ее преподавание. М.: Наука, 1980.
26. *Ланков О. В.* До історії розвитку передових ідей в російській методиці математики. К.: Рад. шк. 1953.

---

* Докладне висвітлення цих питань подано в розділі 8.

27. *Математика.* Математическая модель (статьи) // Мат. энцикл. М.: Сов. энцикл., 1982. Т. 3.
28. *Математика* в школе (статья): Педагогическая энциклопедия. М.: Сов. энцикл., 1965. т. 2.
29. *Маркушевич А. И.* О школьной математике // Математика в школе. 1979. № 4.
30. *Межпредметные* связи естественно-математических дисциплин: Пособие для учителей. М.: Просвещение, 1980.
31. *Методика* викладання математики: Практикум / За ред. Г. П. Бевза. К.: Вища шк., 1981.
32. *Молодший В. Н.* Очерки по философским вопросам математики. М.: Просвещение, 1969.
33. *На путях* обновления школьного курса математики // Сборник статей и материалов. М.: Просвещение, 1978.
34. *Повышение* эффективности обучения математике в школе: Книга для учителя / Сост. Г. Д. Глейзер. М.: Просвещение, 1989.
35. *Потоцкий М. В.* О педагогических основах обучения математике. М.: Учпедгиз, 1963.
36. *Преемственность* в обучении математике: Сб. статей / Сост. А. М. Пышкало М.: Просвещение, 1978.
37. *Проблемы* единого уровня общеобразовательной подготовки учащихся в средних учебных заведениях. (На примере дисциплин естественно-математического цикла). М.: Педагогика, 1983.
38. *Реп'єв В. В.* Загальна методика викладання математики. К.: Рад. шк., 1960.
39. *Рыбников К. А.* Возникновение и развитие математической науки. М.: Просвещение, 1987.
40. *Семенович О. Ф.* Геометрія, аксіоматичний метод. К.: Рад. шк., 1976.
41. *Столяр А. А.* Педагогика математики. Минск: Высш. шк., 1989.
42. *Стройк Д. Я.* Краткий очерк истории математики. М.: Наука, 1969.
43. *Фішман І. М.* Методологічні питання шкільного курсу математики: Посібник для самоосвіти. К.: Рад. шк., 1985.
44. *Фридман Л. М.* Психолого-педагогические основы обучения математике в школе. М.: Просвещение, 1983.
45. *Фройденталь Г.* Математика как педагогическая задача. М.: Просвещение, 1982. Ч. I.; 1982. Ч. II.
46. *Фуше А.* Педагогика математики / Под ред. проф. И. К. Андронова. М.: 1969.
47. *Хабіб Р. А.* Активізація пізнавальної діяльності учнів на уроках математики: Методичний посібник. К.: Рад. шк., 1985.
48. *Хинчин А. Я.* Педагогические статьи. М.: Изд-во АПН РСФСР, 1963.
49. *Хмара Т. М.* Навчання учнів математичної мови: Метод. посібник. К.: Рад. шк., 1985.
50. *Юшкевич А. П.* История математики в России. М.: Наука, 1968.

РОЗДІЛ 2

ПРИНЦИПИ ДИДАКТИКИ В НАВЧАННІ МАТЕМАТИКИ

Навчання математики, як і будь-якого навчального предмету, може бути ефективним засобом формування особистості, досягнення безпосередньої мети — міцного і свідомого засвоєння її змісту — лише тоді, коли за основу навчання будуть прийняті закономірності дидактики, стверджені досвідом викладання. Система таких положень, спеціально орієнтована на особливості математики як навчального предмету, і є головним змістом цього розділу. В ньому подаються найбільш важливі

принципи, які характеризують підхід до навчання математики в радянській школі: морального виховання, науковості, свідомості навчання, систематичності та ін.

Добрі знання цих принципів необхідні майбутньому вчителю для того, щоб правильно організувати свою працю, грамотно, кваліфіковано аналізувати різні навчальні посібники, якими доведеться йому користуватися в своїй роботі.

§ 1. ПРИНЦИПИ НАВЧАННЯ ЯК КАТЕГОРІЇ ДИДАКТИКИ

Процес навчання як складова частина цілісного педагогічного процесу в радянській школі спрямований на формування всебічно і гармонійно розвиненої особистості.

Вивчення і узагальнення досвіду навчання школярів основам науки показує, що для забезпечення єдиного підходу до учнів, до вибору засобів і методів навчальної роботи вчитель повинен дотримуватися положень, які в певному розумінні мають універсальний характер.

В зв'язку з цим в радянській дидактиці розроблені принципи, в яких сформульовано найважливіші вимоги щодо організації процесу навчання, його змісту, форм і методів. Ці єдині вимоги одержали назву дидактичних принципів або принципів навчання. Організація процесу навчання у відповідності з дидактичними принципами дає можливість побудувати його на науковій основі.

Разом з тим слід мати на увазі, що дидактичні принципи, виражаючи певні закономірності навчання і передовий досвід навчально-виховної діяльності школи, не є раз і назавжди встановленими. Вони постійно поглиблюються і змінюються у відповідності з тими завданнями, які ставить перед школою суспільство.

Отже, дидактичні принципи — це основні спрямовуючі положення, що виникають внаслідок аналізу науково-педагогічних закономірностей та практичного педагогічного досвіду. Вони є головним орієнтиром в педагогічній роботі вчителя.

Відомі радянські дидакти М. О. Данилов, І. Я. Лернер, М. М. Скаткін у своїх дослідженнях показали, що принципи навчання як категорії дидактики характеризують способи використання законів і закономірностей навчання у відповідності з цілями виховання і освіти.

Дидактичні принципи — це принципи діяльності, які виражають найзагальніше нормативне знання про те, як треба будувати, здійснювати і удосконалювати навчання і виховання. Закономірності цієї діяльності є теоретичною основою для вироблення норм навчально-виховної роботи вчителя. Проте самі по собі вони не мають конкретних вказівок для такої діяльності. Ці вказівки дають принципи. Таким чином, принципи навчання взаємообумовлені його закономірностями. Наприклад, принцип проблемності в навчанні випливає із закономірності, встановленої С. Л. Рубінштейном, яка полягає у тому, що мислення виникає з проблемної ситуації і спрямоване на її розв'язання.

Але крім законів і закономірностей навчання в становленні принципів враховуються й інші факти, а саме: 1) цілі, які ставить суспіль-

ство перед навчанням і вихованням; 2) конкретні умови, в яких здійснюється навчальний процес; 3) психологічні характеристики процесу учіння; 4) існуючі способи конструювання навчальних і виховних ситуацій.

Доцільно зауважити, що коли мова йде не про дидактичні, а про методичні принципи, то в цьому разі слід мати на увазі специфіку конкретного навчального предмету та його функції в загальній освіті.

Наприклад, А. А. Столяр пропонує систему дидактичних принципів доповнити двома принципами, які характерні для навчання математики:

1) шкільний курс математики повинен відображати фундаментальні ідеї і логіку сучасної математики (у відповідності з рівнем розумової діяльності учнів);

2) навчання математики слід будувати подібно процесу дослідження в математиці, він повинен імітувати процес творчого пошуку в математиці (у відповідній мірі, в якій це допускає рівень розумової діяльності учнів).

Перший принцип стосується побудови змісту навчання математики і певним чином конкретизує дидактичний принцип науковості. Другий принцип стосується побудови процесу навчання і конкретизує поняття проблемності навчання.

В методичній літературі з математики загальновизнаною є така система дидактичних принципів:

1. Принцип морального виховання в навчанні математики.
2. Принцип науковості в навчанні математики.
3. Принцип свідомості, активності та самостійності в навчанні математики.
4. Принцип систематичності і послідовності в навчанні математики.
5. Принцип доступності в навчанні математики.
6. Принцип наочності в навчанні математики.
7. Принцип індивідуального підходу до учнів у навчанні математики.
8. Принцип міцності знань у навчанні математики.

§ 2. ПРИНЦИП ВИХОВАННЯ ОСОБИСТОСТІ

Всебічне виховання особистості передбачає розумовий і моральний, естетичний, духовний і фізичний розвиток, політехнічну освіту і професійну підготовку. Тому реалізація загальної мети виховання вимагає розв'язання окремих завдань, які розглядаються як складові частини.

Виділення складових частин спирається на об'єктивні вимоги суспільства щодо розвитку певних властивостей (якостей) особистості. Оскільки властивості формуються не ізольовано одна від одної, то і сторони виховання, перебуваючи у загальному взаємозв'язку, сприяють формуванню особистості в повному її розумінні. Тому такі якості досконалої особистості, як знання, уміння, переконання, поведінка, можуть бути складовою частиною кожної з зазначених сторін виховання.

Світогляд — це система філософських, наукових, політичних, моральних і естетичних уявлень і переконань людини, яка відображає розуміння навколишнього природного і соціального середовища, ставлення до нього і визначає загальну спрямованість її діяльності.

Мораль — це сукупність норм, принципів і правил, які регулюють поведінку людей у всіх сферах суспільного життя. Щоб дії учня були узгоджені з принципами високої моралі, він повинен сформувати в себе такі риси, як принциповість, сила волі, скромність, чесність по відношенню до самого себе і до інших людей.

Світогляд, основою якого є наукові знання і практичний життєвий досвід, об'єднує в єдине ціле перелічені риси особистості. Звідси випливають можливість і необхідність передавання всім людям знань про закономірності розвитку природи, суспільства і людського мислення.

У формуванні світогляду великого значення набуває і процес засвоєння знань. В зв'язку з цим при вивченні математики (як і кожного навчального предмету) необхідно активізувати навчально-пізнавальну діяльність учнів, викликати в них інтерес до питань, що мають світоглядне значення. Важливої ролі у цьому набуває висвітлення нових ідей науки на сучасному етапі її розвитку, зв'язок з життям, з виробництвом. Вихованню в учнів діалектико-матеріалістичного світогляду на уроках математики сприяють відомості з історії розвитку математики, наукове обгрунтування вчителем закономірностей розвитку природи, суспільства і мислення. Вчитель повинен користуватися принципами науковості, свідомості, активності і самостійності, стимулювання і мотивації, позитивного відношення школярів до учіння і т. п.

§ 3. ПРИНЦИП НАУКОВОСТІ

Вимога дотримання науковості змісту освіти була висунута в радянській педагогічній літературі ще в працях Н. К. Крупської (див. «О работе над новым учебником для новой программы»).

Статус дидактичного принципу щодо вимоги науковості в навчанні бере початок з 1950 р., коли її було сформульовано і обгрунтовано М. М. Скаткіним.

Пізніше Л. Я. Зоріна показала, що науковість змісту освіти — це така її якісна характеристика, для якої має виконуватися система ознак: а) відповідність змісту освіти рівню сучасної науки; б) створення в учнів правильних уявлень про загальні методи наукового пізнання; в) показ найважливіших закономірностей процесу пізнання. Ці умови взаємопов'язані між собою, оскільки реалізація кожного з наступних обумовлена виконанням попередніх. Кожна попередня умова є необхідною базою для реаліазіції наступної.

У першій умові йдеться про те, що відповідно принципу науковості освітній матеріал, який становить зміст шкільного навчання, повинен в певній мірі відповідати рівню сучасної науки. Ця вимога принципу науковості була достатньо реалізована в процесі модернізації навчання математики за останні роки.

Згідно з другою умовою принцип науковості вимагає також знань загальних методів наукового пізнання. Але це тільки необхідна умова науковості знань. Вона недостатня для створення в учнів уявлень про такий процес, як пізнання.

Одним з найефективніших методів наукового пізнання навколишнього світу в математиці є побудова математичних моделей явищ, що вивчаються.

Метод моделювання тепер широко застосовується в найрізноманітніших розділах знань. Тому друга умова принципу науковості природно висуває на перший план навчання школярів тим способам моделювання, які для них цілком доступні.

Третя умова вказує на те, що принцип науковості вимагає формування в учнів уявлень процесу пізнання та його закономірностей.

У навчанні математики вчитель має багато можливостей показу учням закономірності процесу пізнання. Ці питання будуть розглянуті в наступних розділах.

Саме тому в процесі навчання основам наук у школі значно ширше треба запроваджувати проблемне навчання і різноманітні способи досліджень. В процесі реалізації принципу науковості вчитель повинен дотримуватися і принципу доступності, щоб зміст, форми і методи навчання враховували реальні можливості учнів. При цьому слід мати на увазі й те, що принцип доступності передбачає навчання при достатньо високому рівні трудності. Однак цього можна досягти при умові найкращого поєднання індивідуальних і колективних форм пізнавальної діяльності школярів у навчанні.

§ 4. ПРИНЦИП СВІДОМОСТІ, АКТИВНОСТІ І САМОСТІЙНОСТІ

Цей принцип полягає в цілеспрямованому активному сприйманні явищ, що вивчаються, їх осмисленій, творчій переробці і застосуванні. Він випливає з цілей і завдань радянської школи, яка покликана готувати активних і свідомих будівників демократичного суспільства, а також із особливостей процесу навчання, який вимагає осмисленого і творчого підходу до матеріалу, що підлягає вивченню.

Реалізація принципу свідомості, активності та самостійності в навчанні має на меті виконання таких умов: а) відповідність пізнавальної діяльності учнів закономірностям процесу учіння; б) пізнавальна активність учнів у процесі учіння; в) осмислення школярами процесу учіння; г) оволодіння учнями прийомами розумової діяльності в процесі пізнання нового.

Зупинимось коротко на суті кожної в цих умов. Навчальне пізнання є учіння, тобто діяльність учнів, спрямована на засвоєння нових знань та способів діяльності. Тому, говорячи про засвоєння, ми маємо на увазі пізнавальну діяльність учнів, але завжди в поєднанні в керівною, навчаючою роллю вчителя і змістом навчального матеріалу, враховуючи його структуру.

Таким чином, суть процесу навчання в цілому і його складової частини — учіння (засвоєння) полягає в тому, що цей процес випливає з загального ходу процесу пізнання і його закономірностей. У відпо-

відності з ним дидактика виділяє в процесі засвоєння етапи пізнавальної діяльності учнів: сприйняття — осмислення — закріплення — застосування. Ці етапи знаходяться в діалектичному взаємозв'язку: взаємообумовлені, взаємозалежні, проникають один в один.

Якщо в процесі пізнання нового учні будуть виконувати розумові і практичні дії у відповідності з встановленими етапами процесу учіння, то можна стверджувати, що в навчанні створено умови для активізації пізнавальної діяльності учнів і осмислення ними процесу учіння.

Тут слід звернути увагу на такі три обставини. По-перше, процес пізнавальної діяльності в кожному окремому випадку не обов'язково проходить за всіма етапами навчального пізнання і в зазначеній послідовності. Наприклад, у випадку дедуктивного способу мислення учням не має потреби проходити етап сприймання явищ, що вивчаються, і формування відповідних уявлень. Так, в процесі засвоєння нового знання про те, що будь-який переріз кулі площиною є круг, учням пропонують конкретний факт — дана площина перетинає кулю і загальне правило відносно всіх площин, які перетинають кулю, — будь-який переріз кулі площиною є круг. Застосувавши це загальне правило до конкретного факту, учні приходять до висновку: «Отже, даний переріз є круг».

По-друге, названі вище чотири умови реалізації принципу свідомості, активності і самостійності не ізольовані одна від одної (про що теж ми говорили). Виконання першої умови означає виконання останніх. Однак виділення такої сукупності умов розкриває дидактичний механізм дії самого принципу, що має не аби яке значення для практичної діяльності вчителя.

По-третє, щоб можна було в процесі навчання встановити відповідність пізнавальної діяльності учнів закономірностям процесу учіння (перша умова), необхідна діяльність вчителя, спрямована на формування в учнів органічної потреби набувати і засвоювати знання, осмислювати їх, застосовувати на практиці. Тільки при умові такої спрямовуючої діяльності вчителя можна говорити про реалізацію принципу свідомості, активності та самостійності учнів у навчанні.

Свідомість розуміють в дидактиці як засвоєння учнями даних науки, навчального матеріалу, глибоке його осмислення, уміння користуватись знаннями на практиці в нових умовах, перетворення знань в переконання, в керівництво до дії.

В процесі свідомого засвоєння знань формується творче ставлення до вивчення і застосування знань, логічне мислення учнів та їх світогляд.

Свідоме засвоєння навчального матеріалу уникає догматичне, коли учні приймають на віру ті знання, які подає вчитель. Результатом догматичного засвоєння є формалізм знань. Основними його ознаками є відсутність конкретних уявлень про явища, які вивчаються, запам'ятовування без розуміння, без умінь творчо застосовувати знання на практиці, безініціативність, відсутність високо суспільних ідеалів, глибоких переконань і готовності боротися за них.

Конкретно в навчанні математики формалізм у знаннях особливо часто проявляється в тому, що учні безпомилково складають формулювання означення того чи іншого поняття, але не можуть ним скористатися в процесі розв'язування задач, доведення теорем.

У теорії навчання встановлено ознаки свідомості знань, якими може користуватися вчитель в процесі навчання. До них відноситься така сукупність ознак:

а) розуміння механізму розвитку і проявлення зв'язків;

б) розуміння характеру зв'язків між знаннями (рядоположення і супідрядність, ступінь їх стійкості);

в) уміння обгрунтовувати знання;

г) розуміння способів набування знань і галузі їх застосування.

Свідоме навчання обов'язково передбачає активну діяльність учнів у цьому процесі.

Активність є дійовий стан учня, який характеризується прагненням до учіння, напругою і проявом волі в процесі оволодіння знаннями. Тому активність учнів називають пізнавальною активністю.

У навчальному процесі активність учнів проявляється не лише в роботі мисли, а й в практичній діяльності, в суспільній роботі, в напрузі волі, а також в емоційних переживаннях.

Розумова активність учнів в процесі навчання математики має особливо важливе значення в формуванні понять. Тому необхідно володіти методичними прийомами, які сприяють активізації мислення учнів у цьому процесі.

Активність учнів у навчанні проявляється в їх ініціативності та високому ступені самостійності (або пізнавальній самостійності).

Пізнавальна самостійність є вищою формою активності і свідомості учнів у процесі навчання. Тому здійснення в навчанні свідомого і активного процесу учіння неминуче формує таку якість особистості, як пізнавальна самостійність, яка є найважливішою характеристикою діяльності школяра в навчальному процесі.

У теорії навчання встановлено такі ознаки пізнавальної самостійності учнів: прагнення і уміння самостійно мислити, здібність орієнтуватись в новій ситуації, знаходити свій підхід до розв'язання нової задачі; бажання зрозуміти не лише обов'язкові знання, а й способи їх добування; критичний підхід до суджень інших; незалежність власної думки.

Велике значення в питанні формування пізнавальної активності учнів мають самостійні роботи. Вони є не чим іншим як формою спільної діяльності вчителя і учня. Виконуючи самостійну роботу, учні активно оперують набутими знаннями, уміннями і навичками, здійснюють пошукову діяльність. Тому в цій самостійній діяльності учня закріплюються і взаємообумовлюються його пізнавальна активність і самостійність, а така діяльність характеризується високим рівнем свідомості.

Якщо внаслідок навчання учні набули такої якості особистості, як пізнавальна самостійність, то можна стверджувати, що на всіх етапах навчального пізнання розвивався дидактичний принцип свідомості, активності і самостійності в навчанні.

§ 5. ПРИНЦИП СИСТЕМАТИЧНОСТІ І ПОСЛІДОВНОСТІ

Не можна оволодіти наукою, не вивчаючи її в певній послідовності. Також не можна успішно розвивати пізнавальні і творчі здібності учнів без строго продуманої системи їх навчання і виховання.

«Принцип систематичності і послідовності в навчанні обумовлюється і логікою самих наук, що вивчаються в школі, і особливостями пізнавальної і практичної діяльності учнів, яка проходить у відповідності з закономірностями їх розумового і фізичного розвитку. Принцип систематичності і послідовності в навчанні приймається за основу побудови навчальних програм, визначає систему роботи вчителя і діяльність учнів у процесі навчання» [4, с. 73].

Принцип систематичності і послідовності в навчанні здійснюється в усій системі навчальної роботи. Викладати знання систематично — означає, що при вивченні нового слід спиратися на раніше пройдене, виділяти в ньому головне, розкривати загальну ідею, формувати в учнів уміння аналізувати, систематизувати і узагальнювати явища і факти, які вивчаються.

Важливого значення принцип систематичності і послідовності набуває у формуванні в учнів умінь і навичок самостійної роботи з книжкою, у вихованні в них навичок організованості і послідовності в здобуванні знань.

Систематичність у навчанні математики передбачає дотримання певної послідовності у вивченні навчального матеріалу і поступове оволодіння основними поняттями шкільного курсу математики.

Принцип систематичності орієнтує вчителя на досягнення системності знань у свідомості учнів шляхом встановлення найтіснішого зв'язку між елементами вивчуваного матеріалу, розкриття єдності елемента і структури, частини і цілого. Отже, смисл принципу систематичності полягає в тому, що учні усвідомлюють набуті знання як елементи цілісної, єдиної системи.

Сказане дозволяє стверджувати, що науковість навчання неможлива без систематичності, а з систематичністю тісно пов'язане питання про наступність у навчанні. Їх характеризує опора на пройдене, наступний розвиток набутих учнями знань, умінь і навичок, встановлення зв'язків між новими і раніше добутими знаннями. Внаслідок цього знання стають міцними і глибокими.

Систематичності притаманні і організаційні прийоми роботи вчителя: система його вимог до учнів. Систематичність також повинна бути і в навчальній діяльності учнів, в системі методів роботи з кожного навчального предмету, в послідовності виконання домашніх завдань і т. п.

Послідовність у навчанні математики означає, що навчання здійснюється у відповідності з такими правилами: а) від простого до складного; б) від легкого до важкого; в) від відомого до невідомого; г) від уявлень до понять; д) від знання до вміння, а від нього до навичок.

Учитель реалізує цей принцип, якщо навчання математики являє собою систему послідовних кроків, кожний з яких один за одним допов-

ніое відомі учням знання, уміння і навички розумною дозою нових знань, умінь і навичок.

На закінчення відмітимо, що успішна реалізація принципу систематичності і послідовності залежить від того, якого значення надає вчитель міжпредметним зв'язкам; як скоординовані вимоги до учнів між викладачами різних навчальних предметів, чи дотримується вимога наступності у вивченні окремих тем і навчальних предметів. У зв'язку з цим важливого значення набуває наступність навчання в молодших, середніх і старших класах.

§ 6. ПРИНЦИП ДОСТУПНОСТІ

Принцип доступності в навчанні випливає з вимог урахування вікових особливостей учнів. Його покладено в основу складання навчальних планів і програм. Принцип доступності вимагає, щоб обсяг і зміст навчального матеріалу були під силу учням, відповідали рівню їх розумового розвитку та запасу знань, умінь і навичок.

Доступність не слід розуміти як учіння без подолання труднощів. Вона передбачає підготовку учнів до подолання труднощів у навчальній діяльності. Та це й зрозуміло, оскільки навчальна робота вимагає певних зусиль учнів у досягненні поставленої мети. Суть питання полягає не в тому, щоб обійтися без труднощів, а в тому, щоб ці труднощі не підривали, а розвивали сили учня і сприяли б підвищенню результатів навчальних занять.

Реалізація принципу доступності передбачає виконання таких умов дидактичних правил: а) слідувати у навчанні від простого до складного; б) від легкого до важкого; в) від відомого до невідомого.

З цього випливає, що строге дотримання у навчанні принципу систематичності і послідовності передбачає успішну реалізацію принципу доступності.

Слідувати в навчанні від простого до складного означає, що вивчення учнями явищ, фактів, закономірностей, понять і т. п. повинно починатися з найпростіших, з тим щоб підготувати їх до сприйняття складніших. Це положення стосується як теоретичного, так і практичного навчального матеріалу.

Принцип доступності в навчанні привертає до себе увагу також і в зв'язку з проблемою індивідуального підходу до учнів в умовах масового навчання.

§ 7. ПРИНЦИП НАОЧНОСТІ

Теоретичне обгрунтування принципу наочності вперше було сформульовано чеським педагогом Я. А. Коменським, який висунув вимогу вчити людей пізнавати самі речі, а не тільки чужі свідчення про них.

Російський педагог К. Д. Ушинський зазначає, що наочність відповідає психологічним особливостям дітей, які мислять «формами, звуками, фарбами, відчуттями». Наочне навчання, за словами К. Д. Ушинського, «будується не на абстрагованих уявленнях і словах, а на конкретних образах, безпосередньо сприйнятих дитиною».

Наочність збагачує коло уявлень дитини, робить навчання доступнішим, конкретним і цікавим, розвиває спостережливість і мислення.

Принцип наочності випливає із суті процесу сприйняття, осмислення і узагальнення учнями матеріалу, що вивчається. Він означає, що в навчанні необхідно, приймаючи до уваги логіку процесу засвоєння знань, на кожному етапі навчання знайти його вихідний початок у фактах і спостереженнях одиничного або в аксіомах, наукових поняттях і теоріях. Після чого визначити закономірний перехід від сприйняття одиничного, конкретного предмету до загального, абстрактного або, навпаки, від загального, абстрактного до одиничного, конкретного.

Таким чином, радянська дидактика виходить із єдності чуттєвого і логічного, вважає, що наочність забезпечує зв'язок між конкретним і абстрактним, сприяє розвитку абстрактного мислення, а в багатьох випадках служить його опорою. Однак характер і ступінь використання наочності різні на етапах навчання. Надмірне захоплення наочністю в навчанні може привести до небажаних результатів. Конкретна наочність, наприклад, моделі геометричних тіл повинна поступитись абстрактній (зображення геометричних тіл на площині, тобто креслення).

Стосовно значення принципу наочності і його ролі в процесі навчального пізнання дидактика стверджує, що наочність є вихідним моментом навчання головним чином у молодших класах. По мірі наближення учнів до старших класів учитель повинен обирати в навчанні історико-індуктивний шлях поповнення знань: постановка проблеми, історія її розв'язання і сучасний стан, потім практичні або лабораторні роботи.Тут наочність реалізується двічі: як ілюстрація історії відкриття і як спосіб розкриття сучасного розв'язання проблеми.

Однак історичний підхід займає багато часу і не завжди є необхідним. Тому вихідним початком можуть бути теоретичні положення, аксіоми, системи понять, які засвоєні учнями протягом попередніх етапів навчання. У цьому випадку наочність використовується лише для ілюстрації засвоєних учнями знань в процесі їх застосування до розв'язування задач.

За характером відображення реальної дійсності розрізняють такі види наочності:

натуральна (природна) наочність представляє собою реальні предмети або процеси (об'єкти і явища, роздатковий матеріал і ін.);

образотворча наочність (фотокартки, художні картини, рисунки, навчальні картинки і інш.) застосовується, коли показ натурального предмету неможливий або майже неможливий, а споглядання конкретного образу необхідне;

символічна наочність (креслення, графіки, схеми, таблиці, діаграми) по суті є своєрідною мовою, а тому, щоб стати зрозумілою, її потрібно спеціально вивчати. Наприклад, вивчаючи властивості функцій (зростання, спадання, максимум, мінімум і інші) доцільно їх аналітичний запис перекласти на мову графіків і на цій основі тренувати учнів «читати» графіки функцій.

Різні види наочності виконують різні функції. Одні сприяють пожвавленню уявлень (картини, предмети життя), інші становлять опору для абстрактного мислення.

Наочність застосовується і як засіб пізнання нового, і для ілюстрації мислі, і для розвитку спостережливості, і для кращого запам'ятовування матеріалу. Засоби наочності використовуються на всіх етапах процесу навчання: під час пояснення нового матеріалу вчителем, під час закріплення знань, формування вмінь і навичок, під час виконання домашніх завдань, під час контролю засвоєння навчального матеріалу.

Використання наочних посібників у навчанні має задовольняти деяким правилам: орієнтувати учнів на всебічне сприйняття предмета за допомогою різних органів чуття; звертати увагу учнів на найважливіші, суттєві ознаки предмета; показати предмет (по можливості) в його розвитку; надати учням можливість проявити максимум активності і самостійності під час огляду наочних посібників; використовувати засоби наочності стільки, скільки це потрібно, не допускати перевантаження навчання наочними посібниками, не перетворювати наочність, в самоціль.

Отже, вміле використання засобів наочності в навчанні повинно знаходитися в руках учителя. Він повинен у кожному окремому випадку самостійно вирішити, коли та в якій мірі треба використати наочність, адже від цього в значній мірі залежить якість знань учнів.

§ 8. ПРИНЦИП ІНДИВІДУАЛЬНОГО ПІДХОДУ ДО УЧНІВ

Підвищення ефективності навчання безпосередньо пов'язано з тим, наскільки повно враховуються особливості кожного учня. Важливою індивідуальною особливістю учнів є їх здібність до засвоєння знань.

Під впливом зростаючих вимог життя збільшується обсяг і ускладнюється зміст знань, що підлягають засвоєнню в школі. Чим глибше розвивається цей процес, тим чіткіше проявляються індивідуальні відмінності здібностей школярів до навчання.

Як показали численні психолого-дидактичні дослідження, коли вирівняти багато факторів, що впливають на рівень засвоєння нових знань, а саме забезпечити однаковий первинний мінімум знань всіх учнів, позитивне відношення їх до уроку, бажання як можна краще засвоїти матеріал, сумлінно розробити методику введення нового матеріалу, то, не дивлячись на однаковість цих умов, нові знання будуть засвоєні по-різному. Одні учні грунтовно засвоять нове і зможуть застосовувати його в нових, нетрадиційних умовах, які вимагають самостійного розвитку нових знань (вищий рівень засвоєння). Інші засвоять істотні сторони нового поняття чи закономірності і зможуть застосувати їх до розв'язування задач, подібних до тих, які розглянуті в процесі пояснення нового матеріалу (середній рівень засвоєння). Нарешті будуть і такі, хто зрозумів лише окремі, часто неістотні сторони нового поняття чи закономірності і не може застосувати їх до розв'язування навіть простих задач (низький рівень засвоєння). У цьому випадку буде потрібна різна кількість вправ і різний характер допомоги з боку вчителя тим учням, яких треба довести до вищого рівня засвоєння.

У психології навчання встановлено кілька характеристик індивідуальних відмінностей учнів, зв'язаних з поняттям нахилу учнів до навчання. До них відносяться: а) темп засвоєння або просування в навчанні як найбільш стійка характеристика; б) повнота і точність аналізу і синтезу і нерозривно пов'язані з ними узагальнення і абстрагування; в) стійкий нахил учнів до того чи іншого виду аналізу, особливо на початковій стадії роботи з матеріалом; г) рівень сформованих у школярів узагальнень; д) рівень умінь учнів виділяти і узагальнювати способи оперування знаннями; є) економність мислення і т. ін.

Слід зауважити, що передостання (зазначена тут) сторона розумової діяльності дала можливість психологам зробити припущення про те, що не всяке засвоєння знань означає зрушення в інтелектуальному розвитку учня. Це зрушення відбувається тоді, коли навчання забезпечує оволодіння не тільки змістом знань, а й методами, способами їх добування, внаслідок чого учні можуть самостійно здобувати нові знання.

Зазначені вище явища, які мають місце в навчанні школярів, показали неможливість створення в навчанні системи, однаково оптимальної для кожного учня. Ця обставина привела до необхідності реалізації в навчанні принципу індивідуального підходу до учнів.

Суть принципу індивідуального підходу заключається в адаптації (пристосуванні) навчання або до змісту і рівня знань, умінь і навичок кожного учня, або до характерних для нього особливостей процесу засвоєння, або навіть до деяких стійких рис його особистості.

Основним засобом реалізації принципу індивідуального підходу є індивідуальні самостійні роботи, що їх виконують учні. Такі роботи набувають значення специфічного дидактичного засобу організації і керівництва самостійною діяльністю учнів на всіх етапах навчання.

§ 9. ПРИНЦИП МІЦНОСТІ ЗНАНЬ

Принцип міцності знань обумовлюється як завданнями школи, так і закономірностями навчального процесу. Спиратися на здобуті знання, уміння і навички можна лише тоді, коли вони засвоєні твердо і довгий час утримуються в пам'яті.

Міцні знання, уміння і навички потрібні як для успішного продовження освіти, так і для формування в учнів наукового світогляду, розвитку їх здібностей, підготовки до практичної діяльності.

В дидактиці сформульовані умови міцності знань. До них відносяться: активне здобування знань з метою свідомого їх засвоєння; науковість навчання; створення в навчанні умов для запам'ятовування навчального матеріалу.

Зміст і суть принципів науковості і свідомості в навчанні було розкрито вище. Тому розглянемо деякі основи механізму запам'ятовування в процесі навчання.

Запам'ятовування є процес пам'яті, внаслідок якого відбувається закріплення нового шляхом пов'язання його з раніше здобутим.

Запам'ятовування завжди вибіркове: в пам'яті залишається не все, що діє на чуттєві органи індивіда. Від чого це залежить?

Запам'ятовування є закономірним продуктом дії суб'єкта з об'єктом, тобто запам'ятовується те, з чим людина діє. При цьому успіх запам'ятовування навчального матеріалу визначається мотивами, цілями і способами діяльності особистості.

Назвемо головні умови запам'ятовування матеріалу в навчанні:

1. Навчальний матеріал запам'ятовується краще, якщо він входить до змісту головної мети діяльності. Наприклад, якщо метою дій учнів є виявлення властивостей тієї чи іншої геометричної фігури, то їх запам'ятовування буде кращим, ніж в тому випадку, коли властивості фігури повідомляються безпосередньо вчителем.

2. Навчальний матеріал запам'ятовується краще, якщо він викликає активну розумову роботу з ним. Тому важчий матеріал запам'ятовується краще, ніж легкий, через те, що зв'язки між елементами тексту є більш змістовними.

3. Матеріал, який викликає в учнів інтерес і емоції, запам'ятовується краще. В цьому випадку важливого значення набуває мотивація навчальної діяльності учнів. Цього можна, наприклад, досягти за рахунок побудови системи задач, в якій результат розв'язання попередньої задачі потрібний для розв'язування даної. Можливим мотивом діяльності є установка на те, що знання, набуті в процесі вивчення даного матеріалу, знаходять широке застосування на практиці, в житті.

4. Кращому запам'ятовуванню учнями навчального матеріалу сприяє поділ його на невеликі частини, в кожній з яких слід виділити головне.

5. Кращому запам'ятовуванню сприяють уміло організоване повторення пройденого матеріалу (яке передує вивченню нового, що супроводить його вивчення, підсумкове повторення і т. д.), своєчасний контроль знань, умінь і навичок учнів, своєчасне попередження і ліквідація прогалин у знаннях учнів.

Встановлено, що запам'ятовування в процесі повторення відбувається успішно, коли учні використовують різноманітні види розумової діяльності (узагальнюють, порівнюють, аналізують, синтезують і т. п.), якщо повторення організовано так, що воно попереджує забування раніше засвоєного.

Враховуючи специфіку математики, яка вивчається в школі, слід мати на увазі, що строгі математичні формулювання означень, теорем повинні бути підсумком вивчення відповідних об'єктів, властивостей, відношень на інтуїтивному рівні. Такий методичний підхід полегшує запам'ятовування формулювань математичних понять.

Слід пам'ятати, що для реалізації принципу міцності важливе значення має самостійна робота учнів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Крупская Н. К.* Полн. собр. соч., т. 3.
2. *Атутов П. Р., Бабнин Н. И., Васильев Ю. К.* Связь трудового обучения с основами наук. М.: Просвещение, 1983.
3. *Бабанский Ю. К.* Оптимизация процесса обучения. Общедидактический аспект. М.: Педагогика, 1977.

4. *Данилов М. А.* Принципы обучения // Дидактика средней школы / Под ред. М. А. Данилова, М. Н. Скаткина. М.: Просвещение, 1975.
5. *Зорина Л. Я.* Конкретизация принципа научности в дидактике // Новые исследования в педагогических науках. 1975. № 13.
6. *Лернер И. Я.* Качество знаний — пути их определения и обеспечения в учебном процессе // Результаты новых исследований в педагогике / Под ред. Н. М. Шахмаева. М.: НИИ общей педагогики АПН СССР, 1977.
7. *Матюшкин А. М.* Проблемные ситуации в мышлении и обучении. М.: Педагогика, 1972.
8. *Метельский Н. В.* Дидактика математики. Минск.: Изд-во Белорус. гос. ун-та, 1982.
9. *Педагогика* / Под. ред. Ю. Н. Бабанского. М.: Просвещение, 1983.
10. *Общая* психология: Учеб. пособие для педагогических институтов / Под ред. А. В. Петровского. М.: Просвещение, 1970.
11. *Педагогика:* Курс лекций / Под ред. Г. И. Щукиной, Е. Я. Голанта, К. Д. Радиной. М.: Просвещение, 1966.
12. *Педагогика:* Совместный труд АПН СССР и АПН ГДР. М.: Просвещение, 1978.
13. *Педагогика* школы / Под ред. И. Т. Огородникова. М.: Просвещение, 1978.
14. *Педагогическая* энциклопедия. М., 1964. Т. 1.
15. *Пидкасистый П. И.* Самостоятельная познавательная деятельность школьников в обучении: Теоретико-экспериментальные исследования. М.: Педагогика, 1980.
16. *Рубинштейн С. Л.* О мышлении и путях его исследования. М.: 1958.
17. *Скаткин М. Н.* Проблемы современной дидактики. М.: Педагогика, 1980.
18. *Столяр А. А.* Педагогика математики. Минск: Высш. шк., 1974.
19. *Шамова Т. И.* Активизация учения школьников. М.: Педагогика, 1982.

РОЗДІЛ 3

МАТЕМАТИЧНІ ПОНЯТТЯ, ВИСЛОВЛЕННЯ І ДОВЕДЕННЯ

Шкільна математика включає початкові фрагменти різних математичних теорій (арифметики, алгебри, геометрії, математичного аналізу) в змістовному (неформальному) викладі. В процесі навчання математики на будь-якому рівні ми маємо справу з поняттями, висловленнями (твердженнями) і доведеннями; засвоєння математичних знань зводиться, нарешті, до засвоєння певної системи понять, висловлень та їх доведень. Але мета навчання полягає не тільки в засвоєнні учнями теоретичних знань, а й в прищепленні їм умінь і навичок застосовувати ці знання, не тільки в засвоєнні певних доведень, а й у формуванні вміння міркувати, доводити.

Відмінною рисою математики є те, що в ній використовується символічна мова як робочий апарат. В шкільному навчанні ми застосовуємо, як правило, словесно-символічну мову, що включає елементи і символічної мови математики, і природної словесної мови.

Вивчення математики передбачає вивчення математичної мови, але не зводиться тільки до цього. Другою важливою рисою математичного знання є її логічна структура. Розуміння логічної структури означення понять, тверджень теорії (аксіом і теорем) і доведень є необхідною умовою засвоєння цього знання.

У цьому розділі саме і розглядаються мова і логіка математики з точки зору навчання математики. З цією метою використано логічний

апарат, який відомий студентам і є необхідним для майбутніх учителів. Зрозуміло, що цей апарат не входить явно в шкільне навчання (ми тут не розглядаємо питання поглибленого вивчення математики). Однак він допомагає вчителеві знайти спосіб пояснення мови і логіки математики учням, уникаючи явного його використання. Багато з того, що залишається неявним для учнів у навчанні математики, повинно бути виявленим у методичній підготовці вчителя математики.

Розділ має три параграфи: «Математичні поняття», «Математичні висловлення», «Математичні доведення».

§ 1. МАТЕМАТИЧНІ ПОНЯТТЯ

Термін «поняття» звичайно застосовується для позначення уявного образу деякого класу речей, процесів, відношень об'єктивної реальності або нашої свідомості.

Математичні поняття відображають в нашій свідомості певні форми і відношення матеріального світу, абстраговані від їх конкретних індивідуальних властивостей.

Кожне поняття поєднує в собі клас об'єктів (речей, відношень)— **обсяг** цього поняття — і характеристичну властивість, притаманну всім об'єктам цього класу, і тільки їм — **зміст** цього поняття. Наприклад, поняття «трикутник» поєднує в собі клас найрізноманітніших трикутників (обсяг цього поняття) і характеристичну властивість — наявність трьох сторін, трьох вершин, трьох кутів (зміст поняття); поняття «рівняння» поєднує в собі клас всяких можливих рівнянь (обсяг поняття) і характеристичну властивість — рівність, яка має одну або кілька змінних (зміст поняття.)

Зміст поняття розкривається за допомогою означення, обсяг — за допомогою класифікації. За допомогою означення та класифікації окремі поняття об'єднуються в систему взаємопов'язаних понять.

Формування понять — складний психологічний процес, який починається з утворення найпростіших форм пізнання відчуття. Він проходить часто за такою схемою: відчуття — сприймання — уявлення — поняття.

Звичайно, цей процес ділять на два ступеня: **чуттєвий**, який полягає в утворенні відчуття, сприйняття і уявлення, і **логічний**, в якому йдеться про перехід від уявлень до поняття за допомогою узагальнення і абстрагування.

Чуттєвий ступінь в процесі формування понять є першим способом пізнання взагалі, тобто «живе споглядання», і тому його здійснення вимагає широкого застосування наочності. Якщо учень ніколи не бачив куба, або предметів, що мають форму куба, то в нього не може постати уявлення, а отже, і поняття куба.

Процес формування понять буде ефективним, якщо він орієнтує учнів на узагальнення і абстрагування істотних ознак (характеристичної властивості) поняття, яке потрібно сформувати.

Розглянемо процес формувань понять на прикладі поняття куба. Дітям (6—7 років) показують кілька предметів, які відрізняються формою, розмірами, кольором, матеріалом, з якого вони зроблені,

причому таких, що одні з них мають форму куба, а інші ні. Діти, після того як їм вказують на одне з цих тіл і говорять, що це **куб**, безпомилково відбирають всі ті тіла, які мають ту саму форму, не приймаючи до уваги відмінностей, які стосуються розміру, кольору, матеріалу. Тут виділення підкласу із класу предметів, ототожнення тіл виконується за однією ще недостатньо проаналізованою ознакою — зовнішньою формою. Діти ще не знають властивостей куба, вони пізнають його лише за формою.

Наступна робота з формуванням поняття куба полягає в аналізі цієї форми з метою встановлення її властивостей. Учням пропонують шляхом спостереження знайти спільне всіх відібраних тіл, що мають форму куба, чим вони відрізняються від інших Приходять до висновку, що кожен куб має 8 вершин, 6 граней. Але деякі тіла, які ми не вважаємо кубом, теж мають 8 верщин, 6 граней.

Виявляється, у куба всі грані — квадрати (ця робота, звичайно, проводиться після аналогічної роботи, метою якої було виділення класу квадратів з множини плоских фігур).

Залишається один крок до утворення поняття куба — перехід від уявлення до поняття шляхом абстрагування, тобто відокремлення загальних властивостей від інших, несуттєвих. Зрозуміло, що на початковому етапі навчання ще не можна говорити про повне абстрагування цих властивостей, діти ще не мають уявлення куба в чистому вигляді, вони ще не означають куб і протиставляють його прямокутному паралелепіпеду з різними вимірами. Пізніше, коли буде сконструйована логічно впорядкована система геометричних понять (в межах систематичного курсу геометрії), учні дізнаються, що куб — це вид прямокутного паралелепіпеда. В цьому — діалектика розвитку понять.

Наведений приклад показує, що процес формування понять, як правило, тривалий процес, який сприяє розвитку узагальнюючої і абстрагуючої діяльності учнів.

Однак формування математичних понять не завжди проходить у відповідності з наведеною схемою, яка починається з відчуттів. Зокрема, коли поняття, яке формується, пов'язане в тій чи іншій мірі з категорією нескінченності (як, наприклад, поняття прямої, площини, щільності множини раціональних чисел, границі і ін.), то чуттєвий (конкретно-індуктивний) ступінь відіграє меншу роль, оскільки ми не в змозі сприйняти нескінченне (ні в якій формі), і наочність із засобу, що сприяє формуванню поняття, інколи стає гальмуючим фактором.

Наприклад, нескінченність множини раціональних чисел, що знаходяться між будь-якими двома раціональними числами, не стверджується, а навпаки, «заперечується» конкретним сприйняттям скінченного відрізка, який вміщує цю множину. Властивість щільності множини раціональних чисел не можна виявити за допомогою досліду, вона не підтверджується наочними геометричними уявленнями, а встановлюється логічно (абстрактно-дедуктивно). Цей та багато інших прикладів підтверджують висновки наших психологів про те, що сприйняття наочного матеріалу через об'єктивні особливості цього матеріалу може відігравати не лише позитивну, а й негативну роль.

Завершальним етапом формування поняття, як правило, є його **означення.** В математиці і в навчанні математики застосовують різні способи означення понять. Найчастіше, особливо в навчанні геометрії, зустрічаються означення «через найближчий рід та видову відмінність». Прикладом такого означення є таке: *«прямокутник є паралелограмом з прямим кутом».*

Неважко помітити, що означення складається з двох частин: «прямокутник» — означуване поняття і «паралелограм» — визначальне поняття.

Зв'язка «є» (інколи замість «прямокутник є...» говорять «прямокутником називається ...») тут означає, що термін «прямокутник» (тільки що введений) означає те саме поняття, що й вислів «паралелограм з прямим кутом», складене з раніше відомих термінів («паралелограм», «прямий кут»).

Аналізуючи визначальне поняття «паралелограм з прямим кутом», виділяємо поняття «паралелограм» (найближчий рід) і властивість «наявність прямого кута» (видова відмінність). Назва «найближчий рід» виправдана тим, що не виділено інше поняття, обсяг якого включається в множину паралелограмів і включає множину прямокутників. Якби ми визначили прямокутник як чотирикутник, у якого протилежні сторони попарно паралельні і є прямий кут, то ми одержали б громіздке означення саме тому, що поняття «чотирикутник» не є найближчим родом для прямокутника (є поняття «паралелограм», обсяг якого входить до множини чотирикутників і включає множину прямокутників), і тому ускладнилась характеристична властивість (видова відмінність).

Загальну схему означення «через найближчий рід і видову відмінність» можна записати на мові множини (класів):

$$B = \{x \mid x \in A \text{ і } P(x)\}$$

(клас B складається з об'єктів x, які належать A — найближчому роду — і мають властивість P — видової відмінності) або на мові властивостей:

$$x \in B \leftrightarrow x \in A \text{ і } P(x), \text{ або } B(x) \leftrightarrow A(x) \text{ і } P(x)$$

(об'єкт x має властивість B тоді й тільки тоді, коли має властивість A і властивість P).

У нашому прикладі B — означувальний клас прямокутників (або властивість «бути прямокутником»), A — клас паралелограмів (або властивість «бути паралелограмом»), P — властивість «наявності прямого кута».

Таке означення є **явним** означенням, в якому чітко виділені означуване і визначаюче поняття. Воно дозволяє нам при необхідності замінити одне поняття іншим. Такою заміною досить часто ми користуємося в доведеннях теорем.

Проте не всі математичні поняття можна означати в такий спосіб. Процес формально-логічного означення, що легко помітити з наведеного вище прикладу, є процес, який полягає в зведенні одного поняття

до другого, з ширшим обсягом, другого — до третього, яке має ще більший обсяг, і т. д. Цей процес не може бути нескінченним. Повинні бути деякі вихідні, первісні поняття, які не можна означити через інші поняття даної теорії, через те, що їм не передують ніякі інші поняття цієї теорії.

У навчальному процесі слід створювати такі педагогічні ситуації, які б допомогли учням відкрити характерну особливість системи математичних понять, пов'язану з дедуктивною побудовою теорії. З цією метою можна використати різноманітний конкретний матеріал. Наприклад, можна побудувати таку послідовність означень:

O_1 : квадрат — ромб з прямим кутом;

O_2 : ромб — паралелограм з рівними суміжними сторонами;

O_3 : паралелограм — чотирикутник, у якого протилежні сторони попарно паралельні;

O_4 : чотирикутник — многокутник з чотирма сторонами;

O_5 : многокутник — фігура, обмежена замкнутою ламаною лінією;

O_6 : фігура — множина точок.

Неважко помітити: такий процес зведення одних понять до інших доходить до понять «множина» і «точка», які приймаються за первісні і саме тому не означаються через інші поняття.

Отже, первісні, вихідні поняття не означаються явно через інші поняття даної теорії. Однак з цього ще не випливає, що вони ніяк не означаються. В аксіомах описуються основні властивості вихідних понять і відношень між ними, якими й користуються в процесі побудови теорії на основі цих аксіом, тобто при доведенні теорем і означенні інших (означуваних) понять. Тому системи аксіом можна розглядати як **неявні**, опосередковані означення вихідних понять. Таким чином, коли говорять, наприклад, що поняття «точка» і «пряма» — вихідні (первісні) поняття і тому не означаються, треба розуміти точніше: «не означаються явно через інші поняття».

Один і той же розділ шкільного курсу математики можна побудувати за допомогою різних систем понять, які відрізняються між собою порядком введення понять або самими поняттями. Вибір вихідних понять не визначає однозначно послідовність вивчення понять системи. Система понять виявляється лише частково впорядкованою. Наприклад, в традиційній системі понять стереометрії такі поняття, як «кут двох мимобіжних прямих» і «перпендикулярність прямих і площини», можна вивчати в будь-якому порядку. В підручнику А. П. Кисельова кут двох мимобіжних прямих вивчався після перпендикулярності і тому перпендикулярність прямих у просторі, ознака перпендикулярності прямої і площини, теорема про три перпендикуляри формувалися лише для часткових випадків. Внаслідок такого розміщення матеріалу учні вивчали теорему про три перпендикуляри лише для випадку, коли пряма на площині проходить через основу похилої, і не помічали її застосування до розв'язування задач, в яких пряма на площині не проходить через основу похилої. В більшості ж випадків саме про таку ситуацію йдеться в задачах.

Про означення не має смислу говорити, істинне воно чи хибне. Означення може бути правильним (коректним) або неправильним (не-

коректним) в залежності від того, задовольняє воно чи ні відповідним правилам. Одним з найважливіших є правило, що являє собою **відсутність порочного кола.** Порушення цього правила проявляється в тому, що означуване міститься (явно чи неявно) у визначальному. Наприклад, фрази «розв'язок рівняння — це таке число, яке є його розв'язком», «подібними називаються фігури, які між собою подібні» не можна вважати означеннями розв'язку рівняння і подібних фігур відповідно, через те що в кожному з цих речень є порочне коло.

Порочне коло може стосуватися не тільки одного означення, а й двох і більше. Наприклад, в двох означеннях «Кут називається прямим, якщо його сторони взаємно перпендикулярні» і «Дві прямі взаємно перпендикулярні, якщо вони утворюють прямий кут» є порочне коло, тому що тут одне поняття (прямого кута) означене через друге (перпендикулярні прямі), яке в свою чергу означують через перше.

Другим важливим правилом коректності означення є **відсутність омонімії:** кожний термін (символ) слід вживати не більше одного разу в ролі означуваного. Порушення цього правила приводить до того, що один і той же термін (символ) означає різні поняття, тобто порушується один з принципів вживання символів чи термінів як імен.

Певні мовні вирази (символ штучної мови або терміни, слова чи групи слів звичайної мови) виконують функції позначення. Вони порівнюються з певним класом об'єктів (речей, відношень) або з їх уявлюваними образами (поняттями) як назвами, іменами.

Зв'язок імен з їх значеннями (з об'єктами, які ними позначаються) відображає зв'язок мислення з мовою. Формування понять можливе лише при умові приписування їм відповідних імен. Тому важливо пам'ятати принципи коректного вживання імен.

1. **Принцип предметності:** твердження говорить про предмети, імена яких зустрічаються в цьому твердженні (а не про ці імена). Наприклад, твердження «$3 < 5$» говорить про те, що число, позначене цифрою 3, менше числа, позначеного цифрою 5, тобто говорить про числа, а не про їх імена, що тут зустрічаються; твердження «трикутник — многокутник» говорить про те, що клас об'єктів, який позначено терміном «трикутник», є підкласом класу об'єктів, позначених терміном «многокутник», тобто говорить про об'єкти, імена яких зустрічаються в цьому твердженні, а не про самі ці імена.

2. **Принцип однозначності:** кожний символ (термін), що використовується як ім'я, позначає не більше одного об'єкта, тобто *кожне ім'я має не більше одного значення.*

Чому не говоримо, що кожне ім'я має в точності одне значення, а говоримо «не більше одного значення»? Наприклад, стверджуючи, що число a не можна ділити на 0, ми не стверджуємо, що неможливий запис «$a : 0$»; цей запис допустимий, як, наприклад, запис «$a : 2$». Стверджується лише відсутність об'єкта, ім'я якого є мовний вираз «$a : 0$», тобто цей вираз не є ім'ям якого-небудь числа або це ім'я без значення.

Порушення принципу однозначності дає негативні наслідки, особливо в навчанні, оскільки це означає застосування імен, які мають

більше ніж одне значення, що приводить до плутанини і зміщенню понять.

Прикладом такого порушення є застосування символу «AB» для позначення таких об'єктів: прямої, яка проходить через точки A і B; відрізка з кінцями A і B; довжини відрізка AB; променя з початком A, що містить точку B; вектора з початком A і кінцем B. В реченнях, записаних за допомогою природної мови, можна уникнути різночитання, застосовуючи поруч з символом «AB» назву позначеного об'єкта («пряма AB», «відрізок AB», «довжина відрізка AB», «промінь AB», «вектор AB»). Однак це не підходить у випадку записів у символічній формі (не будемо ж писати, наприклад, «пряма $AB \perp$ прямій CD», «відрізок $AB \subset$ прямій CD» і ін.).

Єдиний вихід: в шкільному навчанні математики необхідно строго дотримуватися принципу однозначності вживання імен. Практика підтверджує можливість і доцільність додержування цього принципу. Можна застосувати таку систему позначень:

«пряма AB» — «AB»;
«відрізок AB» — $[AB]$;
«довжина AB» — $|AB|$;
«промінь AB» — $[\overrightarrow{AB}$;
«вектор AB» — «$\overrightarrow{AB}$».

Принцип однозначності установлює, що кожне ім'я може бути іменем не більше як одного предмету. Все ж один і той же предмет може мати багато різних імен (синонімів). Наприклад, записи «5—3», «$8 \times 2 - 14$», «$2^3 : 2^2$» можна розглядати як різні імена числа 2 (після виконання обчислень у всіх випадках одержуємо значення 2). Рівність $5 - 3 = 8 \cdot 2 - 14$ виражає той факт, що імена, які стоять в лівій і правій частинах цієї рівності, означають один і той же об'єкт, мають одне і те саме значення (число, ім'я якого 2). Якщо, наприклад, в лівій частині цієї рівності замінимо «5 — 3» ім'ям «2» з тим самим значенням, то одержимо також істинну рівність «$2 = 8 \cdot 2 - 14$». На цьому окремому прикладі ми ілюстрували ще один важливий принцип вживання імен.

3. **Принцип заміни імен:** висловлення не має свого істинного значення, коли одно з імен, яке входить до цього висловлення, заміняють іншим іменем (тобто синонімом), що має те ж саме значення.

Різні імена одного й того ж предмету часто по-різному характеризують його за допомогою різної інформації про нього. В такому випадку говорять, що імена мають одно й те саме значення, але різний **смисл.**

Наприклад, одну й ту ж пряму можна позначити символом «a» або символом «AB».Перше з цих імен — просте ім'я, довільно закріплене за прямою (ми можемо позначити цю пряму буквою «b»), розглядається як нероздільне. Друге ім'я «AB» — складене: до нього входять імена «A», «B», як його частини і мають побудову, що відображає той спосіб, яким вона (побудова) позначає предмет (пряму, яка проходить через точки A і B). Неважко зрозуміти, що друге складене ім'я має більше пізнавальне значення. Воно говорить нам, що позначена цим ім'ям пряма проходить через точки A і B.

Таким чином, в іменуванні беруть участь три різні поняття: «ім'я», «значення імені», «смисл імені». Говорять, що ім'я називає своє значення і виражає свій смисл (або що воно має таке-то значення і такий-то смисл), а смисл визначає значення. З цього випливає, що слід розрізняти вирази «Не має смислу» і «Не має значення». Наприклад, на множині натуральних чисел ім'я «корінь рівняння $x + 4 = 3$» не має значення. Разом з тим це ім'я має чіткий смисл: це таке число, якщо його підставити замість x в дане рівняння, то зліва і зправа від знака рівності одержимо імена одного й того ж числа. Аналогічно на множині дійсних чисел ім'я «$\sqrt{-4}$» не має значення, але має смисл (таке число, що після піднесення його до квадрату одержимо число —4), або ім'я «2 : 0» не має значення, але має смисл (число, яке при множенні на 0 дає 2).

В шкільному викладанні треба уважно стежити за тим, щоб вживані терміни і символи мали цілком визначені смисл і значення.

Не всі явні означення можна віднести до означень через найближчий рід і видову ознаку. Ось кілька прикладів.

1. «Пряма перпендикулярна до площини, якщо вона перпендикулярна до будь-якої прямої цієї площини», або в символічному запису:

$$a \perp \alpha \underset{\text{озн}}{\leftrightarrow} \forall b\,(b \subset \alpha \Rightarrow a \perp b).$$

2. «Число a ділиться на число b, якщо існує число c таке, що $a = b \cdot c$», або

$$a \vdots b \underset{\text{озн}}{\leftrightarrow} \exists c\,(a = b \cdot c).$$

3. $\text{НСД}\,(a, b) = c \underset{\text{озн}}{\leftrightarrow} a \vdots c,\ b \vdots c,$ і $\forall d\,(a \vdots d$ і $b \vdots d \Rightarrow c \vdots d)$

(«Число c — найбільший спільний дільник чисел a і b, якщо c — їх спільний дільник і ділиться на будь-який інший їх спільний дільник».)

У кожному з цих означень нове відношення (означуване) визначається через раніше відомі відношення (визначаючі): перпендикулярність прямої і площини — через перпендикулярність прямих, відношення «ділиться на» — через відношення «бути добутком», відношення «бути найбільшим спільним дільником» — через відношення «ділитися на».

Всі ці означення є явними, але в них не можна виділити найближчий рід і видову ознаку. Знак «$\underset{\text{озн}}{\leftrightarrow}$», що його тут застосовують, читається: «означає за означенням» або «тоді і тільки тоді за означенням». Якщо ж означається клас об'єктів за схемою $B = \{x \mid x \in A$ і $P(x)\}$, то знак «$\underset{\text{озн}}{=}$» читається: «рівний за означенням» або «називається».

Доповнення «за означенням» істотне тому, що хоча словесні формування явних означень мають вигляд розповідних речень, ці речення не виражають висловлення (в тому розумінні, в якому термін «висловлення» розуміють в математичній логіці), оскільки немає смислу говорити про їх істинність або хибність. З логічної точки зору словесні формулювання означень ближче до наказових, ніж до розповідних речень; їх можна розглядати як накази або дозволи на користування

одним висловом (означуваним) замість другого, більш громіздкого (означаючим).

Знання означення ще не гарантує засвоєння поняття. Один із аспектів формалізму в математичних знаннях полягає саме в тому, що деякі учні, знаючи точне формулювання означення, не взнають означуванний об'єкт в різних ситуаціях, де він зустрічається. Тому методика навчання повинна розробляти систему роботи з означеннями, щоб ліквідувати можливий формалізм в їх засвоєнні.

Важливе значення в цій роботі займає навчання розпізнаванню об'єкта, що відповідає даному означенню, і побудові різного роду **контрприкладів.** З цією метою треба чітко уявити собі **структуру** означення.

Під структурою означення, побудованого за схемою $A(x) \underset{\text{озн}}{\leftrightarrow} B(x)$, розуміють структуру його правої частини, тобто висловлення «B». У шкільній математиці зустрічаються означення різної структури, часом досить складні, і чим складніша структура означення, тим більш старанною повинна бути робота, спрямована на його роз'яснення, на попередження формалізму в його засвоєнні.

Одна з найбільш розповсюджених структур означень — **кон'юнктивна структура.** Подаємо кілька прикладів.

Приклад 1. Означення симетричних відносно прямої точок говорить: «Дві точки X і X_1 називаються симетричними відносно прямої p, якщо ця пряма перпендикулярна до відрізка XX_1 і проходить через його середину. Будемо також вважати, що кожна точка прямої p симетрична сама собі відносно цієї прямої».

Виконаємо аналіз цього означення для випадку $X \notin p$. Отож, для того щоб точки X і X_1 були симетричні відносно прямої p, тобто щоб виконувалась умова $X_1 = S_p(X)$, повинні виконуватись такі умови:

1) ці точки повинні належати перпендикуляру до прямої p, тобто

$$XX_1 \perp p;$$

2) пряма p повинна проходити через середину відрізка XX_1, а це означає, що точки X і X_1 розміщені по різні сторони від p, тобто

$$\exists O(XX_1 \cap p = O),$$

і на однаковій віддалі від неї, тобто $XO = OX_1$.

Таким чином, наше означення (для $X \notin p$) можна записати так:

$$X_1 = S_p(X) \underset{\text{озн}}{\leftrightarrow} XX_1 \perp p \text{ і } \exists O(XX_1 \cap p = O) \text{ і } XO = OX_1.$$

Легко помітити, права частина означення являє собою висловлення кон'юнктивної структури (складається з трьох речень, з'єднаних сполучником «і»).

Виходячи з цього означення, неважко вказати спосіб побудови точки, симетричної даній, а також спосіб розпізнання симетричних точок.

Побудова симетричної точки

Нехай дано довільну точку X ($X \notin p$).

1. Будуємо перпендикуляр XO до прямої p.
2. Продовжуємо перпендикуляр за точку O.

3. На продовженні перпендикуляра відкладаємо відрізок OX_1, рівний відрізку XO.

Внаслідок цих побудов одержимо шукану точку X_1 ($X_1 = S_p(X)$).

Інколи формулювання цього алгоритму приймають за означення симетричних точок. Таке означення, в якому вказано спосіб побудови означуваного об'єкта, називається **конструктивним**.

Наприклад, конструктивне означення осьової симетрії фігур сформулюємо так: «Нехай F — дана фігура і p — фіксована пряма. Візьмемо довільну точку і опустимо перпендикуляр XO на пряму p. На продовженні перпендикуляра за точку O відкладемо відрізок OX', рівний OX. Перетворення фігури F у F_1, при якому кожна точка X переходить в точку X_1, побудовану зазначеним способом, називається симетрією відносно прямої p (Погорєлов О. В. Геометрія, 7 — 11.— К. : Рад. шк., 1991). Іноді надається перевага конструктивному означенню над класичним і це мотивується тим, що важливіше вміти побудувати об'єкт, ніж знати його формальне означення. Здається, що і те, і друге досить важливо.Тому поруч з алгоритмом по будови необхідно подати і формальне означення об'єкта.

Розпізнавання симетричних точок

Задані дві точки X і X_1 і пряма p. Алгоритм розпізнавання, чи симетричні точки X і X_1 відносно прямої p, виходячи з структури означення, можна подати у вигляді схеми (рис. 1). Ця схема підказує нам усі випадки, коли дві точки X і X_1 не симетричні відносно прямої p, тобто різні контрприклади (рис. 2).

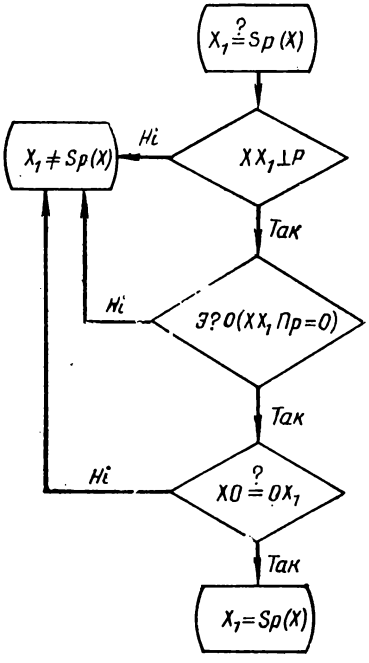


Рис. 1

Приклад 2. Як приклад означення кон'юнктивної структури розглянемо означення найбільшого спільного дільника двох чисел (про що вже йшлося раніше). Відповідний алгоритм розпізнавання (рис. 3) має

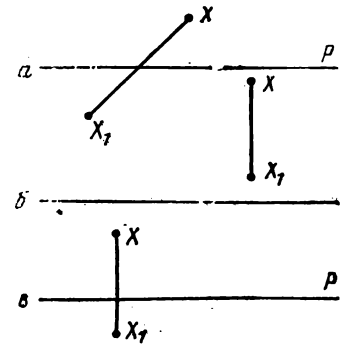


Рис. 2

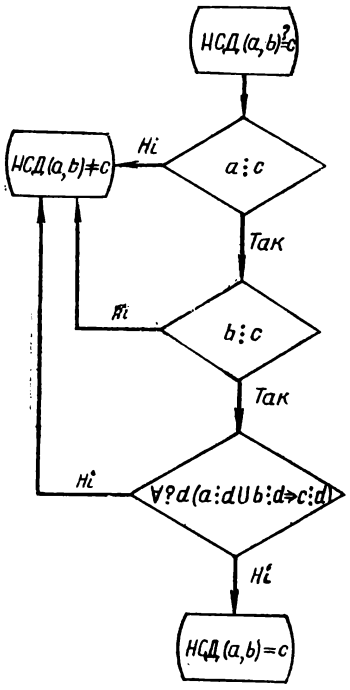


Рис. 3

такий же вигляд, як і алгоритм, поданий схемою на рис. 1.

Помічаємо, що за схемою (рис. 3) $c \neq$ НСД (a, b), якщо

неправильно, що $a \vdots c$,
або
неправильно, що $b \vdots c$,
або

неправильно, що $\forall d (a \vdots d$ і $b \vdots d \rightarrow c \vdots d)$, тобто $\exists d (a \vdots d$ і $b \vdots d$ і $c \vdots d)$.

По суті, ми одержали тут заперечення означення найбільшого спільного дільника, точніше, його правої частини, тобто точний вираз того, що означає запис НСД $(a, b) \neq c$:

$$\text{НСД}(a,b) \neq c \underset{\text{озн}}{\leftrightarrow} \overline{a \vdots c}, \text{ або } \overline{b \vdots c},$$

$$\text{або } \exists d (a \vdots d \text{ і } b \vdots d \text{ і } \overline{c \vdots d}).$$

(Питання про навчання побудови заперечень висловлень складної логічної структури розглядається в наступному параграфі.)

Взагалі, коли означення деякого класу об'єктів (або відношень) має кон'юнктивну структуру

$$x \in A \underset{\text{озн}}{\leftrightarrow} P_1(x) \text{ і } P_2(x) \text{ і } \ldots \text{ і } P_n(x),$$

то слід підкреслити (в процесі навчання), що даний об'єкт належить класу A, якщо він має властивості P_1, P_2, ..., P_n, і не належить цьому класу, якщо не має хоч би однієї з цих властивостей. Таким чином,

$$x \notin A \leftrightarrow \overline{P}_1(x) \text{ або } \overline{P}_2(x) \text{ або } \ldots \text{ або } \overline{P}_n(x)$$

(тут неявно застосовується один з відомих законів де Моргана).

Алгоритм розпізнавання (належності чи неналежності деякого об'єкта x класу A) можна подати у вигляді схеми, зображеної на рис. 4.

Зустрічаються означення і диз'юнктивної структури. Означення множини Z цілих чисел («Алгебра — 7», § 11, п. 32) можна записати на мові властивостей у вигляді

$$x \in Z \underset{\text{озн}}{\leftrightarrow} x \in N \text{ або } x \in N^{-1} \text{ або } x = 0,$$

де N^{-1} — множина чисел, протилежних натуральним. Як видно, це означення має диз'юнктивну структуру.

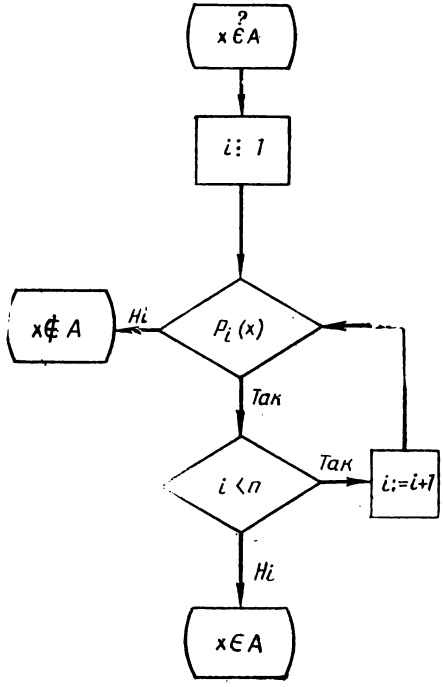


Рис. 4

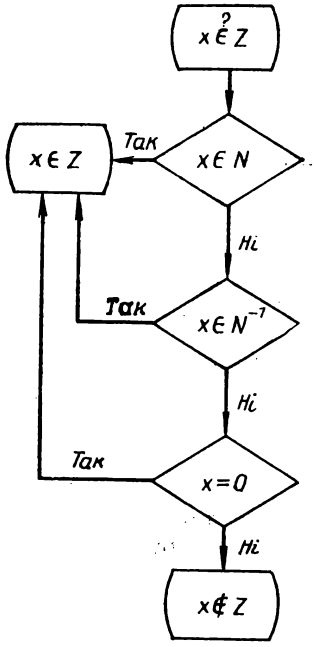


Рис. 5

Відповідний алгоритм розпізнавання можна подати схемою, що воображена на рис. 5.

Диз'юнктивну структуру має також означення паралельності прямої і площини (якщо належність прямої площині вважати частковим випадком паралельності):

$$a \parallel \alpha \underset{\text{озн}}{\leftrightarrow} a \cap \alpha = \varnothing \text{ або } a \subset \alpha.$$

З цього означення випливає, що пряма a **не паралельна** площині α, якщо не виконується жодна з властивостей $a \cap \alpha = \varnothing$ і $a \subset \alpha$, тобто

$$a \nparallel \alpha \leftrightarrow a \cap \alpha \neq \varnothing \text{ і } a \not\subset \alpha.$$

Але з $a \cap \alpha \neq \varnothing$ і $a \not\subset \alpha$ випливає, що існує єдина точка A така, що $a \cap \alpha = A$. В цьому випадку і говорять, що пряма перетинає площину α.

Отже, короткий запис означення і точний вираз його заперечення сприяє встановленню логічних зв'язків між поняттями: із того що пряма і площина не паралельні випливає, що вони перетинаються, і навпаки.

Якщо означення деякого класу A має диз'юнктивну структуру

$$x \in A \underset{\text{озн}}{\leftrightarrow} P_1(x) \text{ або } P_2(x) \text{ або } \ldots \text{ або } P_n(x),$$

то необхідно підкреслити (в процесі навчання), що даний об'єкт належить класу A, коли він має **хоч би одну** з властивостей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ і не належить цьому класу, якщо **не має жодної** з цих властивостей, тобто

$$x \notin A \underset{\text{озн}}{\leftrightarrow} \overline{P}_1(x) \text{ і } \overline{P}_2(x) \text{ і } \ldots \text{ і } \overline{P}_n(x).$$

(Тут знову застосовується один із законів де Моргана. Роз'яснення умов належності і неналежності даного об'єкта класу об'єктів, означення якого має кон'юнктивну або диз'юнктивну структуру, може бути і роз'ясненням цих логічних законів.)

Алгоритм розпізнавання, що відповідає означенню диз'юнктивної структури, можна подати у вигляді схеми (рис. 6).

Зустрічаються означення і складнішої структури. Подаємо кілька прикладів.

Відомі різні (еквівалентні) означення паралельності прямих. Якщо суміщення прямих не вважати окремим випадком паралельності, то означення має кон'юнктивну структуру:

$$a \parallel b \underset{\text{озн}}{\leftrightarrow} \exists \alpha\,(a \subset \alpha \text{ і } b \subset \alpha) \text{ і } a \cap b = \varnothing.$$

При такому означенні паралельності транзитивність має місце, якщо різні букви a, b, c позначають різні прямі. Коли ж суміщення прямих вважати окремим випадком паралельності, то означення має складнішу кон'юнктивно-диз'юнктивну структуру:

$$a \parallel b \underset{\text{озн}}{\leftrightarrow} \exists \alpha\,(a \subset \alpha \text{ і } b \subset \alpha) \text{ і } (a \cap b = \varnothing \text{ або } a = b).$$

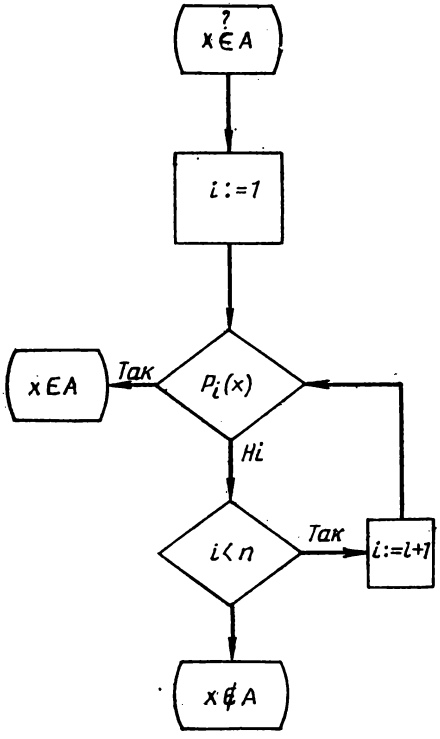


Рис. 6

У цьому випадку паралельність є відношенням еквівалентності і розбиває площину (або простір) на класи еквівалентності — пучки (або в'язки) паралельних прямих. Такому означенню відповідає алгоритм розпізнавання, поданий у вигляді схеми (рис. 7).

Складнішу структуру, яка не зводиться до кон'юнктивно-диз'юнктивної, мають означення деяких понять аналізу. Складність структури цих означень обумовлена наявністю кванторної приставки, що містить різнойменні квантори. Нагадаємо, що кванторами називають вирази: «для всіх» («для всякого», «для любого» ...) — квантор за-

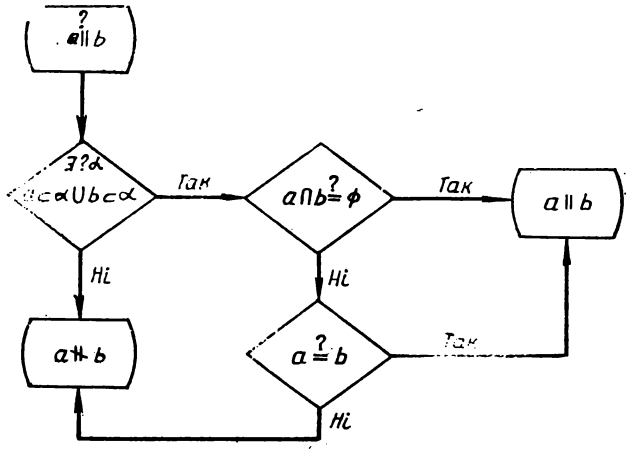


Рис. 7

гальності і «існує» («деякі») — квантор існування, незалежно від того, чи записані вони словами звичайної мови, чи відповідними символами (∀, ∃). Наприклад, звичайне означення границі функції в точці можна записати так:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \underset{\text{озн}}{\leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \, (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon).$$

Для того щоб це означення (в словесному формулюванні або символічному записі) зробити доступним для учнів, потрібна відповідна робота, яка передбачає:

а) формування інтуїтивного поняття границі функції в точці;

б) роз'яснення цього інтуїтивного поняття різними способами (за допомогою різних зворотів мови);

в) поелементний приклад роз'яснення інтуїтивного поняття в точне означення математичного поняття границі (саме поелементний приклад, а не стрибок від інтуїтивного поняття до математичного, який може виявитися недоступним).

Інтуїтивне поняття границі формується на конкретних прикладах функцій за допомогою таких зворотів мови, як «функція прямує до числа b, коли x прямує до числа a». У цьому реченні використано слово «прямує», яке не є математичним терміном (його значення раніше не означено математично). Використовується і такий зворот мови: «Значення функції як завгодно близько підходить до числа b, коли значення x досить близько до a (досить мало відрізняється від a)».

Ці синонімічні вирази поступово уточнюються за допомогою наочного геометричного поняття околу, яке створює можливість одержати аналітичний вираз того, що інтуїтивно розуміємо під «прямує», «близько», а також зв'язку між «як завгодно близько» і «досить близько».

Чим складніша структура означення математичного поняття, тим більше треба працювати над переосмисленням інтуїтивного образу і його перекладу в математичний.

В математиці часто застосовуються так звані індуктивні (рекурсивні) означення, які поступово запроваджуються і в шкільне навчання.

В найпростіших випадках, які зустрічаються в шкільному навчанні, індуктивне означення функції натурального аргументу (послідовності) будується за такою схемою:

$$f(0) = a \text{ (або } f(1) = a),$$
$$f(n+1) = \varphi(n, f(n)),$$

тобто задають значення означуваної функції для 0 (або для 1) і виражають відомим способом її значення для $n+1$ (φ — відома функція) через n і її значення для n.

Наприклад, послідовність

$$1, -\frac{1}{1\cdot 3}, \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}, -\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}, \ldots$$

можна визначити таким чином (у припущенні, що закономірність утворення нових членів одна й та сама):

$$f(1) = 1,$$
$$f(n+1) = -f(n) : (2n+1)$$

(таке означення застосовується, зокрема, у випадку програмування процесу обчислення суми відповідного ряду з заданим степенем точності).

У теперішніх умовах індуктивні означення рідко зустрічаються в шкільному навчанні, але приймаючи до уваги їх широке розповсюдження і значення в математиці (рекурсивні функції — одне з математичних уточнень інтуїтивного поняття алгоритма), можна передбачати, що їх застосування в навчанні математики буде поступово розширюватися.

Ми вже говорили про те, що зміст поняття розкривається за допомогою означення (явного чи неявного), а обсяг — за допомогою класифікації.

Часто класифікація складається з багатоступінчатого поділу множини об'єктів на два класи за допомогою деякої властивості (двочленний поділ, або «дихотомія», в термінах класичної логіки). В загальному вигляді це треба розуміти так. Нехай маємо множину A і властивість P_1, причому існують елементи A, які мають і не мають цієї властивості. Припустимо, що

$$A_1 = \{x \mid x \in A \text{ і } P_1(x)\} \text{ і } \overline{A}_1 = \{x \mid x \in A \text{ і } \overline{P}_1(x)\}.$$

Таким чином, одержуємо поділ множини A на два класи:

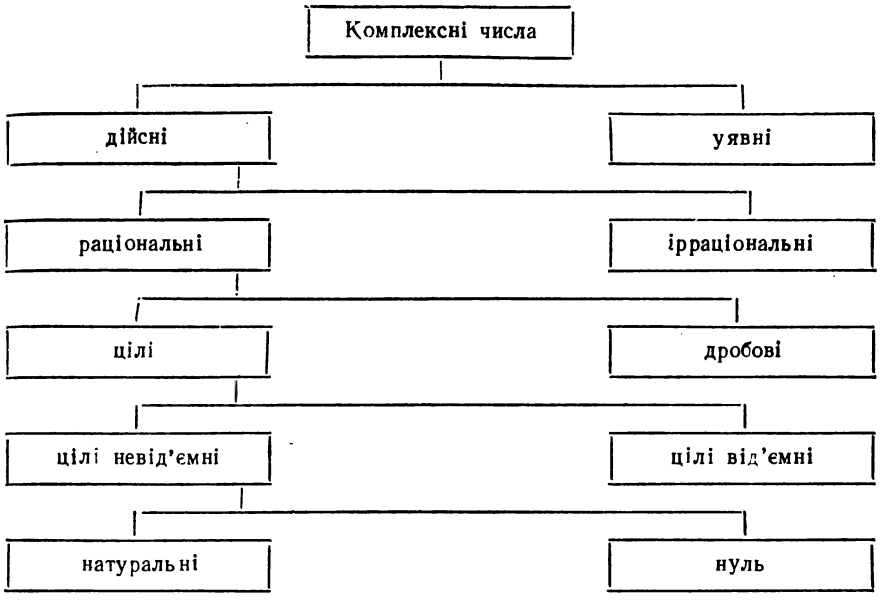
$$A_1 \text{ і } \overline{A}_1 \quad (A_1 \cup \overline{A}_1 = A \text{ і } A_1 \cap \overline{A}_1 = \varnothing).$$

Потім виділяються в A_1 два класи за допомогою властивості P_2:

$$A_2 = \{x \mid x \in A_1 \text{ і } P_2(x)\} \text{ і } \overline{A}_2 = \{x \mid x \in A_1 \text{ і } \overline{P}_2(x)\},$$

тобто визначається поділ множини A_1 на два класи: A_2 і $\overline{A}_2$. Аналогічно розбивається і A_2 на два класи: A_3 і $\overline{A}_3$ — за допомогою деякої властивості P_3 і т. д. Ця послідовність класів закінчується на якомусь A_k, подальший поділ якого вже не розглядається.

Прикладом такої послідовності поділу є класифікація чисел, що відображає (якщо читати її знизу вгору) схему розвитку поняття числа:



В методичному відношенні можуть бути корисними і схеми без слів. Наприклад, схема, що на рис. 8, є зображенням залежності класів чотирикутників, що вивчаються в планіметрії (трапеції, паралелограми, прямокутники, ромби і квадрати).

Для унаочнення класифікації можна скористатися і так званими діаграмами Ейлера — Венна, на яких різні класи об'єктів зображають у вигляді множини точок, обмежених простими замкненими лініями.

Якщо M позначає множину трикутників, A — клас прямокутних трикутників і B — клас рівнобедрених трикутників, то діаграма на рис. 9, *а* являє собою поділ множини трикутників на два класи: прямокутних і непрямокутних трикутників; діаграма на рис. 9, *б* — поділ множини трикутників на два класи: рівнобедрених і нерівнобедрених; діаграма на рис. 9, *в* — поділ множини трикутників на чотири класи: 1) прямокутних рівнобедрених; 2) прямокутних нерівнобедрених; 3) рівнобедрених непрямокутних; 4) непрямокутних нерівнобедрених трикутників.

За допомогою діаграм Ейлера — Венна можна виконати широку різноманітність вправ, що сприяють систематизації знань учнів, правильному розумінню відношень між різними поняттями. Вони стають також апаратом для аналізу деяких класів міркувань (про які йтиметься далі).

Значення діяльності з класифікації (однієї з важливих видів розумової діяльності) далеко виходить за межі засвоєння математичних

знань. Необхідність класифікувати виникає в любій галузі людської діяльності. Цьому треба вчити в школі.

§ 2. МАТЕМАТИЧНІ ВИСЛОВЛЕННЯ

Кожна математична теорія являє собою множину висловлень (тверджень), що описують деяку теорію, якщо ця теорія викладається змістовно в певній конкретній інтерпретації, як це має місце в шкільному навчанні, або якийсь клас структур, що аксіоматизується, якщо вона викладається абстрактно (напівформально або формально) поза всякою інтерпретацією.

Належність висловлення до деякої математичної теорії визначається двома ознаками:

а) висловлення записано (або сформульовано) на мові даної теорії, складається з математичних (які належать мові теорії) і логічних термінів або символів і не містить в собі ніяких термінів або символів;

б) висловлення істинне, тобто є або вихідним істинним висловленням (аксіомою) даної теорії, або його істинність встановлюється доведенням за допомогою вже відомих (вихідних або раніше доведених) істинних висловлень.

Наприклад, висловлення «сума кутів кожного трикутника дорівнює 180°» є геометричне твердження, належить теорії евклідової геометрії, тому що:

а) воно записане на мові геометрії (хоч і одночасно на українській мові), тобто складається з геометричних («сума кутів», «трикутник», «180°») і логічних («кожного», «дорівнює») термінів або символів;

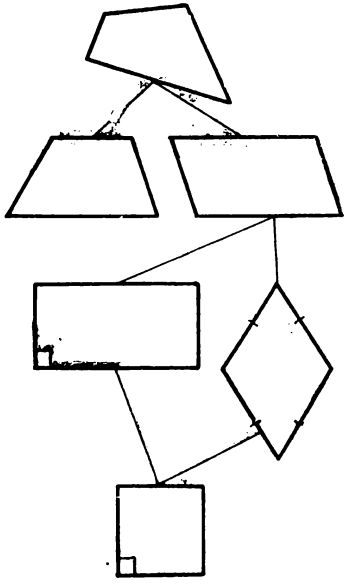


Рис. 8

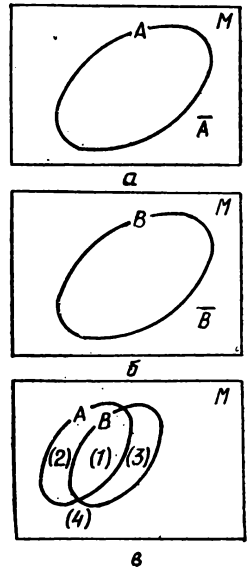


Рис. 9

б) воно істинне, тому що доводиться в межах евклідової геометрії, тобто на основі її аксіом або інших вже доведених тверджень цієї теорії.

Аналогічно висловлення

$$«a + b = b + a \text{ для будь-яких } a,\ b \in Q»$$

належить до алгебраїчної теорії, яка описує структуру $(Q, +)$, тому що:

а) воно записано на мові цієї теорії, складається з символів, які позначають поняття цієї теорії (a, b — змінні для елементів із Q; «+» — знак операції додавання в Q; «$\in$» — знак належності елемента (або значення змінної) множині; «=» — логічний символ, «для будь-яких» — логічний термін), і не має ніяких інших термінів або символів;

б) воно істинне, звичайно приймається за одну з аксіом, яка характеризує групову структуру $(Q, +)$.

Такі ж твердження, як

«Пряма має вигляд туго натягнутої нитки», (1)

«Сума кутів трикутника не дорівнює 180°», (2)

$«a + b = b$ для будь-яких $a,\ b \in Q»$, (3)

не належать відповідним теоріям: (1) і (2) не належать до евклідової геометрії, (3) не належить до теорії структури $(Q, +)$.

Дійсно, (1) не належить ніякій геометричній теорії, оскільки містить такі терміни, як «має вигляд», «туго натягнута нитка», не означають геометричні поняття, тобто твердження (1) не сформульовано на мові геометрії. Це твердження, однак, виконує деяку дидактичну функцію, вона вказує ту конкретну реальну інтерпретацію, в якій будується шкільна геометрія. В цій геометрії прямій дійсно приписується вигляд туго натягнутої нитки (так виконується зображення прямої на рисунках), хоч цей вигляд прямої не стосується дедуктивного способу побудови геометричної теорії. Це надзвичайно важливо, необхідно підкреслювати в процесі навчання, що в доведеннях геометричних теорем ми маємо право користуватись тільки геометричними твердженнями, причому такими, істинність яких встановлена раніше (або прийнята без доведення).

Твердження (2) записано на геометричній мові, але не відноситься до теорії евклідової геометрії, через те що воно суперечить висловленню цієї теорії («Сума кутів кожного трикутника дорівнює 180°») і тому хибне (не виражає властивості структури евклідової площини). Якщо твердження (2) включити в евклідову геометрію, наприклад, як нову аксіому, ми одержали б суперечливу теорію, яка нічого не описує, не має ніякої моделі.

Твердження (3) записано на мові теорії, що описує структуру $(Q, +)$, але воно хибне. Щоб це встановити, достатньо одного контрприкладу, тобто встановити істинність заперечення твердження (3):

$$«\text{Існують } a,\ b \in Q \text{ такі, що } a + b \neq b»,$$

наприклад $3 + 4 \neq 4$. (Встановлення хибності загального висловлення за допомогою контрприкладу — досить корисна вправа на різних етапах навчання.)

З кожним математичним твердженням пов'язані зміст (виражений в ньому математичний зміст) і логічна форма (або структура). Уявлення, що в процесі навчання математики можна обмежитися тільки розкриттям змісту такого твердження, помилкове. Зміст нерозривно пов'язаний з формою, і не можна осмислити перше без розуміння другого.

Одним з головних завдань навчання математики є формування вмінь встановлювати істинності математичних висловлень (частіше за допомогою доведення). Значення істинності залежать від їх логічної структури, тому природно вважати одним із завдань методики викладання математики розкриття логічної структури математичних висловлень.

Розкрити логічну структуру складного (складеного) висловлення — значить показати, з **яких елементарних висловлень** його сконструйовано і **як** воно складено з них, тобто за допомогою яких та в якому порядку були застосовані **логічні зв'язки** (слова або групи слів) **«не»**, **«і»**, **«або»**, **«якщо ..., то»**, **«тоді й тільки тоді»**, **«для будь-якого»**, **«існує»** (а також деякі синонімічні вирази). Вони означають логічні операції над висловленнями і дають можливість із одних висловлень утворювати інші.

Кожне математичне (і не лише математичне) висловлення або елементарне, тобто не розчленовується на частини, кожна з яких є також висловленням, або побудоване з елементарних, певним чином з'єднаних між собою логічними зв'язками.

Сукупність і порядок таких зв'язок складає **логічну структуру** (або **логічну форму**) складеного висловлення.

Встановлення логічної структури математичних висловлень було б даремним без роз'яснення точного смислу логічних зв'язок, які в ньому застосовані. Таке роз'яснення необхідне тому, що, як свідчать численні дослідження, навіть багаторазове застосування зазначених вище слів само по собі ще не забезпечує правильного розуміння їх смислу. Не лише школярі, а й дехто з дорослих, які вже тисячу разів застосовували в своїх міркуваннях сполучник «або», відповідають заперечливо, наприклад, на питання

«чи є істинним висловлення «$3 \leqslant 5$» («$3 < 5$» **або** «$3 = 5$»)?»

Без розуміння точного смислу логічних зв'язок не можна досягти і правильного розуміння точного смислу всієї логіко-математичної конструкції, тобто математичного твердження, утвореного за їх допомогою, а значить, і висловленого в ньому математичного змісту.

Наведемо приклад. Нехай дано трикутник ABC і точку D на стороні AC (рис. 10). Висловлення «$|AB| = |BC|$», «$|AD| = |DC|$», «$BD \perp AC$» елементарні, вони не розчленовуються на частини, кожна з яких — висловлення.

З цих елементарних висловлень можна утворити різні складні висловлення. Розглянемо деякі з них:

«Якщо $AB = BC$ **і** $AD = DC$, **то** $BD \perp AC$».

«Якщо $AB = BC$, **то** $AD = DC$ **і** $BD \perp AC$».

«Якщо $AB = BC$ **або** $AD = DC$, **то** $BD \perp AC$».

«Якщо $AB = BC$ **і** BD **не** перпендикулярно AC, **то** $AD \neq DC$ (AD **не** дорівнює DC)».

Неважко помітити, прийнявши до уваги відомі геометричні співвідношення і правильне розуміння точного смислу слів **«не»**, **«і»**, **«або»**, **«якщо..., то»** (можливе роз'яснення якого буде далі), що висловлення (1) істинне, (2) і (3) хибні, (4) істинне.

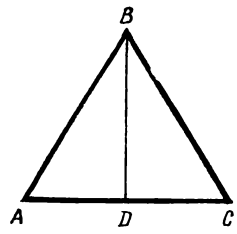


Рис. 10

Висловлення (1) і (2) утворені з одних і тих самих елементарних висловлень за допомогою одних і тих самих логічних зв'язок і відрізняються лише порядком цих операторів: поміняли в (1) місцями **«і»** і **«то»**, внаслідок чого одержали нове висловлення (2), при цьому змінилося значення істинності : (1) істинне, (2) хибне.

Висловлення (3) відрізняється від (1) тим, що сполучник **«і»** замінили сполучником **«або»**, і від цього також змінилось значення істинності: (1) істинне, (3) хибне.

Як бачимо, значення істинності складного висловлення істотно залежить від сукупності і порядку логічних зв'язок, за допомогою яких воно утворено з елементарних висловлень, тобто від логічної структури (форми).

Структури висловлень (1) і (4) різні, але вони так пов'язані між собою, що обидва ці висловлення мають одне й те саме значення істинності. Таким чином, якщо ми доведемо істинність висловлення (1), то висловлення (4) вже не потребує спеціального доведення. Висловлення (1) і (4) рівносильні або еквівалентні, вони виражають одну й ту ж думку в різній формі, причому рівносильність висловлень — властивість їх логічної структури, вона не залежить від змісту висловлення.

Візьмемо два висловлення іншого змісту, але тієї ж структури що й (1) і (4):

«Якщо число ціле **і** додатне, **то** воно натуральне». (1′)

«Якщо число ціле **і не** натуральне, **то воно не** додатне». (4′)

Що спільного у висловленнях (1) і (1′), (4) і (4′), таких різних за змістом? Вони мають одну й ту саму структуру. Щоб виразити загальну логічну структуру різних за змістом складних висловлень, достатньо абстрагуватися від конкретного змісту складових їх елементарних висловлень, позначивши їх якими-небудь буквами, наприклад:

«$AB = BC$» і «число ціле» однією буквою X,

«$AD = DC$» і «число додатне» однією буквою Y,

«$BD \perp AC$» і «воно (число) натуральне» однією буквою Z.

Тоді логічні структури пар висловлень (1) і (1′), (4) і (4′) можна записати так:

(1) — (1′). **«Якщо** X **і** Y, **то** Z».

(4) — (4′). **«Якщо** X **і не** Z, **то не** Y».

Як видно, заміняючи елементарні висловлення, що входять до складних, буквами, ми опускаємо в записах цих складних висловлень те, чим вони відрізняються (конкретний зміст), і зберігаємо тільки те, що є для них спільним (логічну структуру, форму). Те, що ми тут виконали, можна назвати **логічним аналізом висловлень.** Для чого він потрібний? Замість того щоб встановити окремо для висловлень (1) і (4), потім (1′) і (4′), що істинність кожного з них визначається істинністю другого, доцільно встановити один раз для висловлень такої логічної структури.

Такий метод властивий для математики. Адже ми не встановлюємо окремо для $(1 + 3)^2$, $(2 + 5)^2$, $(3 + 8)^2$ і т. п., чому дорівнює квадрат суми цих чисел, а заміняємо конкретні числа змінними, замість яких можна підставити любі числа, і доводимо один раз для будь-яких двох чисел, x, y, що $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

В записах (1) — (1′) і (4) — (4′) букви X, Y, Z можна розглядати як змінні для висловлень (пропозиційні змінні). Замість них можна підставити не лише ті елементарні висловлення в наших прикладів, які вони замінили, але й будь-які інші, зрозуміло, зв'язані за змістом, щоб вийшли осмислені складні висловлення.

Наприклад, якщо замість X підставити твердження «чотирикутник — паралелограм», замість Y — твердження «його діагоналі взаємно перпендикулярні», а замість Z — твердження «чотирикутник — ромб», одержимо:

«Якщо чотирикутник — паралелограм **і** його діагоналі взаємно перпендикулярні, **то** чотирикутник — ромб» (1″).

«Якщо чотирикутник — паралелограм і **не** ромб, **то** його діагоналі **не** взаємно перпендикулярні» (4″).

Ці два висловлення мають ту саму властивість, що й (1) і (4), тобто вони **рівносильні**, або кожен з них **випливає** з іншого.

Відношення **рівносильності** і **слідування** між висловленнями широко застосовуються в математиці і в навчанні математики. Перше з цих відношень зводиться до другого, а відношення слідування є основою кожного доведення. Не викликає сумніву, що ці відношення слід роз'яснювати в процесі навчання математики приблизно на такому ж рівні, на якому було нами вище проілюстровано роз'яснення і розкриття логічної структури висловлень.

Істотне значення в процесі засвоєння математичних знань має вміння розрізняти речення, які містять вільні входження змінних, від таких, які не мають подібних входжень.

Ось кілька прикладів:

$3 < 5$; (1) $7 < 5$; (2) $x < 5$. (3)

Існує натуральне число x таке, що $x < 5$. (4)

Для кожного натурального числа x $x < 5$. (5)

$3 + 4 = 7$; (6) $5 + 3 = 7$; (7) $x + y = 7$. (8)

Існують натуральні числа x, y такі, що $x + y = 7$. (9)

Для будь-яких двох натуральних чисел x, y $x + y = 7$. (10)

$x + y = y + x$. (11)

Існують натуральні числа x, y такі, що $x + y = y + x$. (12)

Для будь-яких двох натуральних чисел x, y, $x + y = y + x$. (13)

Що виражають ці речення з логічної точки зору? Речення (1), (4), (6), (9), (12), (13) виражають **істинні висловлення**, речення (2), (5), (7), (10) — **хибні висловлення**, а речення (3), (8), (11) не є висловленнями через те, що до них не можна (не має смислу) поставити питання: про істинність чи хибність.

Якщо ж замість змінної (всіх змінних) підставити конкретне значення (конкретні значення), то ці речення перетворяться у висловлення (точніше, в речення, які виражають висловлення), істинні чи хибні в залежності від підставлених значень. Ці речення є **формами для висловлень** (або **висловлювальними формами**), що породжують висловлення однієї форми, хоч мають, можливо, і різні значення істинності.

Речення (11) при будь-яких значеннях змінних x, y перетворюється в істинне висловлення. Саме тому речення (13) виражає істинне висловлення (закон комутативності додавання в множині N).

Як видно, хоч речення (4), (5), (9), (10), (12), (13) теж мають змінні, вони на відміну від речень (3), (8), (11) виражають висловлення. Це пояснюється тим, що вони не мають **вільних** входжених змінних, всі змінні, які входять до них, **зв'язані** кванторами загальності або існування, які виражаються словами «існує» і «для кожного» (вираз «Існують натуральні числа x і y» — скорочений запис двох кванторів існування: «Існує натуральне число x, існує натуральне число y», аналогічно вираз «Для кожних двох ....» — скорочений запис двох кванторів загальності).

Зазначимо, що операція підстановки значення можлива тільки у випадку вільного входження змінних.

Так, має смисл підставляти різні значення замість x в реченні (3). Одержимо істинні або хибні висловлення (табл. 1).

Однак не має смислу підставляти значення замість x в реченні (4) або (5).

Таблиця 1

x	$x < 5$	І або Х?
1	$1 < 5$	І
2	$2 < 5$	І
3	$3 < 5$	І
4	$4 < 5$	І
5	$5 < 5$	Х
6	$6 < 5$	Х

Вираз «Для кожного x A (x)» («$\forall x$ A (x)») є істинним, якщо висловлювальна форма A (x) перетвориться в істинне висловлення, коли замість x підставити конкретне значення (з множини значень цієї змінної), і хибне, якщо знайдеться принаймні одне значення x (з цієї ж множини), при підстановці якого A (x) перетвориться в хибне висловлення.

Вираз «Існує x таке, що A (x)» («$\exists x$ A (x)») є істинним, якщо знайдеться хоча б одне значення x (з множини значень цієї змінної), підстановка якого замість x в A (x) перетворює цю висловлювальну форму в істинне висловлення, і хибне, якщо підстановка будь-якого значення x (з цієї множини) перетворює цю висловлювальну форму в хибне висловлення.

Роль елементів логіки в теорії і практиці навчання математики полягає в тому, що по-перше, засвоєння загальних логічних способів мислення, про які мова піде в розділі IV, є необхідною умовою форму-

вання і розвитку пізнавальної діяльності учнів і, по-друге, розроблені в межах математичної логіки деякі загальні поняття (висловлення, предикат, логічні операції, відношення слідування і т. д.) створюють можливості розкрити структуру і глибше врозуміти математичний вміст. Мова йде лише про розумне, дидактично доцільне застосування деяких логічних понять і позначень як важливих допоміжних засобів навчання. Переоцінка ролі логіки як однієї з основ теорії навчання математики теж шкідлива, як і недооцінка цієї ролі.

У зв'язку з уточненням ролі логіки в практиці навчання математики доречно навести слова академіка А. М. Колмогорова: «Відповідальність викладачів математики тут особливо велика, через те що окремого предмету «логіка» в школі немає і знайомство з початками логіки в значній мірі практично відбувається на уроках математики»*.

Наведені вище таблиці істинності і означення кванторів в загальному добре узгоджуються з смислом відповідних виразів на звичайній мові. Виключення становить імплікація (умовне висловлення), таблиця істинності якої не у всіх рядках узгоджується з смислом, де зворот мови «якщо ..., то» застосовується на звичайній мові.

Це питання заслуговує спеціального розгляду, оскільки великі труднощі в навчанні виникають саме там, де точний смисл, в якому окремі звороти мови використовуються в математиці, відрізняється від смислу цих зворотів у звичайній мові.

Словосполучення **«якщо..., то»**, **«із... слідує»**, **«із ... випливає»**, **«... спричиняє»** та інші часто зустрічаються в математичних текстах, а також в шкільних підручниках. Аналіз показує, що за допомогою цих словосполучень звичайної мови можна виразити різні формально-логічні поняття. Інакше, спроба уточнення (або формалізації) подібних формулювань приводить до одного з таких логічних понять:

а) до складного висловлення (імплікації), утвореного з двох висловлень «*A*» і «*B*» за допомогою логічної зв'язки, **«якщо ..., то»**, (**«Якщо** *A*, **то** *B*»), що позначається в літературі з логіки одним із знаків «$\supset$», «$\rightarrow$»; б) до відношення **логічного слідування** (із висловлення «*A*» слідує (випливає) висловлення «*B*»); в) до відношення формалізованого виведення (із «*A*» виводимо «*B*»).

Через те, що логіка шкільної математики неформалізована, то останнє поняття (відношення формалізованого виведення) в цьому курсі не можна застосувати. Аналіз застосування словосполучення «якщо ..., то» в зазначеній мові показує, що він вживається саме в тих випадках, коли значення істинності висловлення, яке стоїть між словами «якщо » і «то», невідоме («Якщо завтра буде добра погода, то здійснимо прогулянку до лісу» і т. п.).

Такі слова, як «завтра», «сьогодні», «тут», «там», «вдома», «ми» і т. ін., мають значення, яке змінюється в різних випадках, і можуть відігравати в звичайній мові роль змінних математичної мови. В математиці ж значення істинності висловлення, яке стоїть між словами

---

* *Колмогоров А. Н.* Научные основы школьного курса математики. Первая лекция. Современные взгляды на природу математики.//Математика в школе. 1969. № 3. С. 17.

«якщо» і «то», невідоме частіше всього у випадку висловлювальної форми (предикату).

Наприклад, у висловленні «**Якщо** число n ділиться на 6, **то** воно ділиться на 3» змінна n може приймати різні значення і ми заздалегідь не знаємо значення істинності висловлення «Число n ділиться на 6», що стоїть за словом «якщо», оскільки воно позначає висловлювальну форму. Говорячи, «Якщо число n ділиться на 6, то воно ділиться на 3», ми часто маємо на увазі висловлення «Для кожного числа n: якщо n ділиться на 6, то n ділиться на 3» (квантор загальності здебільшого явно не висловлюється).

Аналогічно, коли говоримо: «Якщо $ABCD$ — ромб, то $AC \perp BD$», ми заздалегідь не знаємо, чи є чотирикутник $ABCD$ ромб. Тут роль змінних відіграють букви A, B, C, D (змінні для точок) або символ «$ABCD$» можна розглядати як змінну для чотирикутника. Коли доводимо відповідну теорему (про властивість діагоналей ромба), то розуміємо, що в її формулюванні явно не висловлено про квантор загальності. Якщо відновити повне формулювання, одержимо: «Для будь-якого чотирикутника $ABCD$: якщо $ABCD$ — ромб, то $AC \perp BD$».

Розглянемо два висловлення, які утворені за допомогою **«якщо ..., то»**:

«**Якщо** $x = 3$, **то** $x^2 = 9$». (1)

«**Якщо** $x^2 = 9$, **то** $x = 3$». (2)

У висловленні (1) звичайно говорять, що воно правильне (істинне), про висловлення (2) — що воно непр авильне (хибне). В якому ж смислі розуміють їхні словосполучення **«Якщо ...., то»**?

Якщо сприйняти його в смислі імплікації, то обидві імплікації, (1) і (2), виражають висловлювальні форми. При цьому (1) перетворюється в істинне висловлення при будь-якому значенні x, тобто висловлення

«$\forall x$ (**якщо** $x = 3$, **то** $x^2 = 9$)»

істинне, а (2) — висловлювальна форма, яка при одних значеннях змінної (наприклад, 0, 1, 2, 3) перетворюється в істинне висловлення, а при інших («—3») — в хибне, тобто висловлення

«$\forall x$ (**якщо** $x^2 = 9$, **то** $x = 3$)»

хибне.

Таким чином, коли говорять, що (1) істинне, а (2) хибне, то словосполучення «якщо ..., то» розуміють не в смислі імплікації, а як синонім для виразу «із... слідує», тобто як позначення відношення **слідування**: в (1) стверджується, що коли висловлення «$x = 3$» істинне, то й висловлення «$x^2 = 9$» істинне або «$x^2 = 9$» істинне принаймні при всіх тих значеннях x, при яких істинне «$x = 3$». Це й означає, що «$x^2 = 9$» **слідує** з «$x = 3$».

Найважливіше відношення між висловленнями, відношення слідування, яке досить часто зустрічається в шкільному навчанні, доцільно позначити відповідним символом «$\Rightarrow$». Отже, ми встановили, що

«$x = 3 \Rightarrow x^2 = 9$»,

оскільки висловлення «$\forall x$ (**якщо** $x = 3$,**то** $x^2 = 9$)» істинне.

Коли ж говорять, що висловлення (2) хибне, мають на увазі, що з «$x^2 = 9$» **не слідує** «$x = 3$», тобто що висловлення
«$\forall x$ (**якщо** $x^2 = 9$, то $x = 3$)» хибне.

Взагалі, нехай «$A(x)$» і «$B(x)$» — висловлення, які мають вільну змінну x. Коли ж ми говоримо, що з «$A(x)$ **слідує**» $B(x)$»?

«$A(x) \Rightarrow B(x)$, якщо «$B(x)$» перетворюється в істинне висловлення в крайньому разі при всіх тих значеннях x, при яких «$A(x)$ перетворюється в істинне висловлення. Це означає, що висловлення «$\forall(x)$ (якщо $A(x)$, то $B(x)$)» (або $\forall x\, A(x) \supset B(x)$), де «$\supset$» — знак імплікації, істинне.

Визначене таким чином відношення слідування поширюється на будь-які висловлення: із висловлення «A» слідує висловлення «B», якщо «B» істинне в крайньому разі в усіх випадках, коли істинне «A».

Якщо в «A» слідує «B» і з «B» слідує A («$A \Rightarrow B$» і «$B \Rightarrow A$»), то висловлення «A» і «B» **рівносильні**, що позначають символом «$A \leftrightarrow B$». Наприклад, «$x^2 - 3x = 0$» $\leftrightarrow$ «$x(x^\circ - 3) = 0$», через те що «$x^2 - 3x = 0$» $\Rightarrow$ «$x(x - 3) = 0$» і «$x(x - 3) = 0$» $\Rightarrow x^2 - 3x = 0$».

Відмітимо, що записи «$A(x) \Rightarrow B(x)$» і «$A(x) \leftrightarrow B(x)$» являють собою висловлення (а не висловлювальні, іменні форми), перше — висловлення про слідування одного висловлення («$A(x)$») з другого («$B(x)$»), друге — висловлення про рівносильність двох висловлень («$A(x)$» і «$B(x)$»).

З відношенням слідування і рівносильності пов'язані вирази: **«необхідна умова»**, **«достатня умова»**, **«необхідна і достатня умова»**, що застосовуються в шкільному навчанні.

Якщо з висловлення «A» слідує висловлення «B» («A» $\Rightarrow$ «B»), то «A» виражає **достатню умову** для «B», а «B» — **необхідну умову** для «A» (якщо в «A» слідує «B», то істинність «A» достатня для істинності «B», а істинність «B» необхідна для істинності «A»). Таким чином, вороти мови «з «A» слідує «B», «A» — достатня умова для «B» і «B» — необхідна умова для «A» — по суті застосовуються як синоніми.

Якщо «$A \leftrightarrow B$», тобто висловлення «A» і «B» рівносильні («$A \leftrightarrow B$», або «$A \Rightarrow B$ і $B \Rightarrow A$»), то, приймаючи до уваги вище наведені синоніми для «слідує», можна стверджувати, що кожне з висловлень «A» і «B» виражає необхідну і достатню умову для другого. Таким чином, вороти мови «A рівносильно «B», «A необхідно і достатньо для B», «B необхідно і достатньо для A» застосовуються як синоніми.

Зустрічаються випадки, коли з «A» слідує «B», а з «B» не слідує «A», тобто висловлення «A» і «B» не рівносильні. В цьому разі «A» — достатня, але не необхідна умова для «B», а «B» — необхідна, але недостатня умова для «A».

У математиці найчастіше зустрічаються так звані **умовні висловлення**, імплікації, які складаються з двох частин, пов'язаних між собою логічним сполученням **«якщо ..., то»** або іншим, рівносильним йому. Якщо деяку теорему подано у вигляді імплікації «Якщо P, то Q», то перший член імплікації «P», тобто висловлення, записане між словами «якщо ..., то», називається **умовою**, а другий член імплікації «Q», тобто висловлення, записане після слова «то», — **висновок** теореми.

Для імплікації

«Якщо P, то Q» (1)

дамо означення ще трьох імплікацій в такий спосіб:

а) якщо в (1) поміняти місцями «P» і «Q», то дістанемо нове висловлення

«Якщо Q, то P», (2)

яке називають **оберненим** по відношенню до висловлення (1);

б) якщо в (1) замінити «P» і «Q» їх запереченнями «$\bar{P}$» і «$\bar{Q}$» відповідно, то дістанемо висловлення

«Якщо $\bar{P}$, то $\bar{Q}$», (3)

яке називають **протилежним** по відношенню до висловлення (1);

в) якщо в (1) виконати одночасно перетворення, зазначені в (а) і (б), то одержимо висловлення

«Якщо $\bar{Q}$, то $\bar{P}$», (4)

яке називають контрапозиційним (протилежно-оберненим, або оберненим протилежному) по відношенню до висловлення (1).

Неважко встановити, наприклад, за допомогою таблиць істинності або безпосереднім міркуванням, що висловлення (1) і (4), (2) і (3) рівносильні (рис. 11).

Таким чином, якщо висловлення «Якщо P, то Q» — теорема деякої теорії, то рівносильне йому висловлення «Якщо $\bar{Q}$, то $\bar{P}$» теж належить цій теорії (істинне), причому, якщо перше доведене, друге вже не потребує спеціального доведення. Так, висловлення «Якщо многокутник правильний, то навколо нього можна описати коло» — геометрична теорема. Тому і контрапозиційне висловлення «Якщо навколо многокутника не можна описати коло, то многокутник неправильний» — теж геометрична теорема, причому вона вже не має потреби в доведенні, якщо перше доведено.

Якщо висловлення «Якщо P, то Q» — теорема деякої теорії, то обернене висловлення «Якщо Q, то P» може й не бути теоремою цієї теорії. Це добре відомо з шкільного курсу математики, де можна зустріти приклади, коли висловлення, обернене деякій теорії, теж являє собою теорему (обернену теорему), і багато прикладів, коли обернене висловлення не є теоремою. В наведеному вище прикладі обернене висловлення «Якщо навколо многокутника можна описати коло, то цей многокутник правильний», не є теоремою (це легко встановити за допомогою контрприкладу, тобто неправильного многокутника, наприклад рівнобедреної трапеції або прямокутника).

В процесі навчання математики часто доводиться формулювати заперечення висловлень складеної логічної структури. Звичайно це робиться інтуїтивно, без явного застосування яких-небудь логічних правил і при цьому часто допускаються помилки.

Правила побудови і перетворень заперечних висловлень складеної логічної структури (зве-

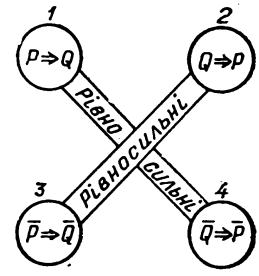


Рис. 11

дення заперечень до елементарних формул) засновані на декількох рівносильностях, доступних для учнів, що виражають відомі широко застосовувані закони логіки:

«Неправильно, що не A**»**, рівносильне **«**A**»** (1)

$$(\text{«}\overline{\overline{A}} \leftrightarrow A\text{»}).$$

Закон подвійного заперечення дозволяє замінити висловлення

«Неправильно, що не A**»** висловленням **«**A**»**.

«Неправильно, що A і B**»** рівносильне **«не** A **або не** B**»**

$$(\text{«}\overline{A \text{ і } B} \leftrightarrow \overline{A} \text{ або } \overline{B}\text{»}). \quad (2)$$

«Неправильно, що A **або** B**»** рівносильне **«Не** A і не B**»**

$$(\text{«}\overline{A \text{ або } B} \leftrightarrow \overline{A} \text{ і } \overline{B}\text{»}). \quad (3)$$

Закон де Моргана дає можливість замінити висловлення

«Неправильно, що A і B**»** висловленням **«Не** A **або не** B**»**

і висловлення **«Неправильно, що** A **або** B**»** висловленням **«Не** A і не B**»**.

«Неправильно, що коли A**, то** B**»** рівносильне **«**A і не B**»**

$$(\text{«}\overline{\text{Якщо } A, \text{ то } B} \leftrightarrow A \text{ і } \overline{B}\text{»}). \quad (4)$$

Закон заперечення імплікації дозволяє замінити висловлення

«Неправильно, що коли A**, то** B**»** висловленням **«**A і не B**»**.

«Неправильно, що для кожного x (має місце) A**»** рівносильне **«Існує** x **таке, що не** (має місця) A**»**

$$(\text{«}\overline{\forall} xA(x) \leftrightarrow \exists\, x\overline{A}(x)\text{»}). \quad (5)$$

«Неправильно, що існує x **таке, що** (має місце) A**»** рівносильне **«Для кожного** x **не** (має місця) A**»**

$$(\text{«}\overline{\exists}\, xA(x) \leftrightarrow \forall\, x\overline{A}(x)\text{»}). \quad (6)$$

Закони (5) і (6) дають таке правило перетворення висловлень, що починаються з кванторів: квантор загальності заміняють квантором існування, квантор існування — квантором загальності; а знак заперечення переносять на вираз, що стоїть за квантором.

Перелік законів (1)—(6) та засновані на них правила перетворення висловлень досить прості, і їх неважко роз'яснити учням на конкретних прикладах.

Подаємо кілька прикладів застосування цих правил:

1. Звернемося ще раз до означення прямої, перпендикулярної до площини:

$$\text{«}a \perp \alpha\text{»} \underset{\text{озн}}{\leftrightarrow} \text{«}\forall\, b \text{ (якщо } b \subset \alpha\text{, то } a \perp b\text{)»}.$$

Візьмемо тепер заперечення лівої і правої частин означення і одержимо, що пряма не перпендикулярна до площини:

$$\text{«}\overline{a \perp \alpha}\text{»} \leftrightarrow \text{«}\exists\, b\,(b \subset \alpha \text{ і } \overline{a \perp b})\text{»}.$$

2. Розглянемо означення парної функції:

$$«f \text{ — парна функція}» \underset{\text{озн}}{\leftrightarrow} «\forall x \in D(f)\ (-x \in D(f) \text{ і } f(-x) = f(x))».$$

Що ж означає: «f не є парною функцією?»

$$«f \text{ не є парною функцією}» \leftrightarrow «\exists x \in D(f)\ (-x \notin D(f) \text{ або } f(-x) \neq f(x))».$$

3. Чим складніша структура висловлення, тим імовірніші помилки в побудові його заперечення.

Розглянемо означення границі функції в точці:

$$«\lim_{x \to a} f(x) = b» \underset{\text{озн}}{\leftrightarrow} «\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D(f)\ (\text{якщо } 0 < |x - a| < \delta, \text{ то } |f(x) - b| < \varepsilon)».$$

Що ж означає: «Число b не є границею функції f при $x \to a$»?

$$«\lim_{x \to a} f(x) \neq b» \leftrightarrow «\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in D(f)\ (0 < |x - a| < \delta \text{ і } |f(x) - b| \geqslant \varepsilon)».$$

4. «f — періодична функція» «$\leftrightarrow$» $\underset{\text{озн}}{\leftrightarrow}$ «$\exists l \neq 0\ \forall x \in D(f)\ (x - l \in D(f)$ і $x + l \in D(f)$ і $f(x - l) = f(x)$ і $f(x + l) = f(x))$».

«f не є періодичною функцією» $\leftrightarrow$ «$\forall l \neq 0\ \exists x \in D(f)\ (x - l \notin D(f)$ **або** $x + l \notin D(f)$ **або** $f(x - l) \neq f(x)$ **або** $f(x + l) \neq f(x))$».

Правила побудови заперечень висловлень складної логічної структури можна роз'яснити учням поступово в процесі навчання математики. Значимість цих правил можна порівняти з значимістю граматичних правил. Раз засвоєні, вони потім застосовуються автоматично, звільняючи від необхідностей в кожному випадку шукати розв'язання.

§ 3. МАТЕМАТИЧНІ ДОВЕДЕННЯ

Говорячи «математичне доведення», ми маємо на увазі доведення математичних тверджень, або, точніше, доведення тверджень в межах якої-небудь математичної теорії. Далі будемо користуватися терміном «доведення» в розумінні «математичне доведення».

Виходячи з такого розуміння цього терміну ми розрізняємо **змістовні** (неформальні) і **формальні** доведення, які застосовуються відповідно в змістовних, напівформальних і в формальних математичних теоріях.

У шкільному навчанні деякі початкові фрагменти математичних теорій (арифметики, алгебри, геометрії, аналізу) викладаються змістовно (неформально). Тому й доведення в шкільній математиці будуються як змістовні доведення, в яких використовуються звичайні міркування, а правила логічного виведення не фіксуються. Питання про те, як ми доводимо, як доведені твердження одержуємо з уже відомих істинних тверджень даної теорії, залишаються в сформованій практиці навчання по суті не роз'ясненими. Часто відповідь (яку ми зустрічаємо) «За допомогою міркування», очевидно, нічого не роз'яснює

(поняття доведення «роз'яснюється» за допомогою міркування, яке само потребує роз'яснення). Навчання ж дедуктивному доведенню без роз'яснення правил виведення, що застосовується в логіці, подібно навчанню класти цегляну стіну без будь-якої мови про розчин. Ось чому внаслідок такого навчання доведенню учні часто будують «доведення», які руйнуються подібно тій цегляній стіні, яка складена без розчину.

Питання про роз'яснення найпростіших правил виведення (схем дедуктивних міркувань), що застосовуються в неявній формі в доведеннях шкільного курсу математики, давно стало предметом дискусії в нашій і зарубіжній літературі. Мова йде не про те, що в шкільному навчанні застосовувалися доведення в повній логічній формі з помітною логікою. Такі доведення (симантичні аналоги формальних доведень) досить громіздкі і непридатні для практики доведення. Мова йде лише про те, щоб на окремих конкретних прикладах показати учням, що ті доведення, які ми звичайно будуємо, являють собою стислі, скорочені форми доведення, які можна перетворити в повні логічні форми виявленням використовуваних наявно правил виведення (слідування). Зрозуміло, що це питання може й не бути спеціальною темою програми, оскільки воно (питання) стосується не змісту, а методів навчання математики. Методи навчання доведенню, які передбачають роз'яснення логіки доведень, сприяють інтенсифікації впливу навчання на розвиток логіки мислення учнів. Їх можна здійснювати в крайньому разі на факультативних заняттях або в класах з поглибленим вивчанням математики. Вчитель повинен уміти подати доведення в повній логічній формі ще й тому, що ця форма допоможе йому порівняти різні змістовні, стислі доведення з метою оцінки їх складності, допоможе йому сформулювати методично доцільні питання для в'ясування того, як учні зрозуміли спосіб і хід доведення.

Найпростіші правила виведення можна виявити і роз'яснити за допомогою логічного аналізу конкретних доведень з метою з'ясування, як доводжуване твердження виводиться (слідує) з інших (посилок або припущень).

Подаємо приклад логічного аналізу двох різних доведень твердження «Діагоналі прямокутника рівні». Раніше відмітимо, що різні доведення однієї й тієї ж теореми можуть відрізнятися як математичними умовами (тобто використанням в них істинних тверджень даної теорії — аксіомами, означеннями, раніше доведеними теоремами), так і логікою (використанням в них правил виведення, які в змістовних доведеннях, зрозуміло, не фіксуються).

Математичні посилки характеризують спосіб доведення, який, звичайно, залежить від прийнятої системи викладу теорії.

Ми розглянемо два способи доведення названої вище теореми: за допомогою осьової симетрії і рівності трикутників. Перш за все сформулюємо твердження, яке доводиться у вигляді імплікації: «Якщо чотирикутник — прямокутник, то його діагоналі рівні» або «Якщо $ABCD$ — прямокутник, то $AC = BD$» (рис. 12). Спочатку подаємо два змістовних доведення у стислій формі, як вони звичайно викладаються в шкільних підручниках.

Доведення I. Точки D і B симетричні точкам A і C відносно осі (рис. 12). Це безпосередньо випливає з раніше доведеної теореми «Серединний перпендикуляр до сторони прямокутника є його віссю симетрії». Значить, відрізки AC і DB симетричні відносно вісі MN. Тому $AC = BD$.

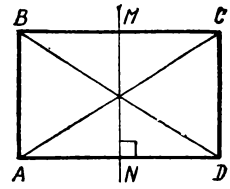


Рис. 12

Доведення II. $\triangle BAD = \triangle CDA$, як прямокутні ($\angle A = \angle D = 90°$), $AB = CD$, як протилежні сторони прямокутника, і AD — спільна сторона. Отже, $AC = BD$.

За допомогою логічного аналізу доведення I ми виявимо і роз'яснимо деякі правила виведення, а потім, використовуючи ці самі правила, подамо у вигляді повної логічної форми і доведення II.

Логічний аналіз доведення I. З метою аналізу доведення I виділимо в ньому твердження, опускаючи при цьому в тексті доведення слів «значить», «тому» і розіб'ємо складні твердження на елементарні.

Очевидно, доведення I можна записати у вигляді послідовності з чотирьох тверджень:

1. «$S_{MN}(A) = D$».
2. «$S_{MN}(C) = B$».
3. «$S_{MN}(AC) = DB$».
4. «$AC = BD$».

Однак ця послідовність тверджень ще не являє собою повного запису доведення. В ньому не видно, на основі яких дедуктивних міркувань (правил виведення) твердження 4 одержано з йому попередніх.

З'ясуємо, якими твердженнями треба його доповнити, щоб одержати повний (розгорнутий) запис доведення.

Розглянемо по порядку кожне з тверджень 1—4. Внаслідок чого твердження 1 істинне? Очевидно, внаслідок раніше доведенної теореми, оскільки ми провели MN як серединний перпендикуляр відрізка AB.

А як встановити істинність твердження 2? З твердження 1 за теоремою про серединний перпендикуляр до сторони прямокутника слідує, що $S_{MN}(ABCD) = DCBA$, а з цього твердження слідує твердження 2.

Твердження 3 слідує з тверджень 1 і 2 за властивістю осьової симетрії, а твердження 4 — з твердження 3 за означенням рівності трикутників.

Але коли ми говоримо «слідує», то розуміємо застосування деякого правила слідування (виведення), яке в звичайній практиці доведення, звичайно, не фіксується.

Спробуємо зараз записати доповнену послідовність тверджень. Зправа, де ми показуємо, на якій основі твердження входить в доведення (аналіз доведення), поставимо знак питання замість поки що невідомого нам правила виведення, застосування якого вдається необхідним для того, щоб одержати дане твердження як наслідок тверджень, які йому передують.

№ п/п	Доведення	Аналіз доведення
1	MN — серединний перпендикуляр AD	За побудовою
2	Якщо MN — серединний перпендикуляр AD, то $S_{MN}(A) = D$	Р. д. т.*
3	$S_{MN}(A) = D$	1, 2, ?
4	Якщо $S_{MN}(A) = D$, то $S_{MN}(ABCD) = (DCBA)$	Р. д. т.
5	$S_{MN}(A) = D$	3, 4, ?
6	Якщо $S_{MN}(ABCD) = (DCBA)$, то $S_{MN}(C) = B$	Властивості симетрії
7	$S_{MN}(C) = B$	5, 6, ?
8	$S_{MN}(A) = D$ і $S_{MN}(C) = B$	3, 7, ?
9	Якщо $S_{MN}(A) = D$ і $S_{MN}(C) = B$, то $S_{MN}(AC) = DB$	Властивості симетрії
10	$S_{MN}(AC) = DB$	8, 9, ?
11	Якщо $S_{MN}(AC) = DB$, то $AC = DB$	За означенням
12	$AC = DB$	10, 11, ?

Тепер попробуємо зняти знаки запитання. Хоч їх і багато, все ж вони не обов'язково позначають різні правила виведення. Ми переконаємося без надмірних зусиль, що для цього досить лише двох правил виведення.

Позначимо елементарне твердження 1 через P, а елементарне твердження 3 через Q. Тоді перші три твердження нашої послідовності можна записати так:

1. «P».
2. «**Якщо**» P, **то** Q».
3. «Q».

І щоб твердження 3 слідувало з тверджень 1 і 2, необхідне правило виведення, яке незалежно від змісту тверджень «P» і «Q» допускає слідування з тверджень вигляду «P» і «якщо P, то Q», твердження «Q».

Коли ж тепер через P позначити твердження 3, а через Q — твердження 5, то це останнє твердження одержимо з 3 і 4 за тим самим правилом.

Очевидно, за цим же правилом одержимо твердження 7 з тверджень 5 і 6, а твердження 10—з тверджень 8 і 9 (в останньому випадку P позначає складне твердження «$S_{MN}(A) = D$ і $S_{MN}(C) = B$»), і твердження 12 — з тверджень 10 і 11.

Для одержання ж твердження 8 з тверджень 3 і 7 необхідне правило, яке дозволяє з двох тверджень «P» і «Q» одержати як наслідок твердження «P» і «Q».

---

* Р. д. т.— раніше доведена теорема.

Отже, ми вияснили, що логіка наведеного доведення подана двома правилами виведення:

$$\frac{\text{«}P\text{»; «якщо } P\text{, то } Q\text{»}}{\text{«}Q\text{»}} \ (1) \quad \text{і} \quad \frac{\text{«}P\text{»; «}Q\text{»}}{\text{«}P \text{ і } Q\text{»}}. \ (2)$$

Але як перевірити те, що ці правила виводу (схеми дедуктивних міркувань) допустимі, тобто що ніколи при істинних посилках (вони записані над рискою), міркуючи за цими схемами, ми не можемо одержати хибних висловлень (висновки записано під рискою).

Для роз'яснення цього питання достатньо знати, в якій залежності знаходяться значення істинності тверджень «**якщо** *P*, **то** *Q*» і «*P* і *Q*» від значень істинності складових тверджень «*P* і *Q*», тобто точний смисл логічних операторів «**якщо ..., то**» і «**і**»: твердження «**якщо** *P*, **то** *Q*» звичайно вважають хибним тоді й тільки тоді, коли «*P*» істинне, а «*Q*» хибне, твердження ж «*P* і *Q*» вважають істинним тоді й тільки тоді, коли «*P*» і «*Q*» обидва істинні.

Тому, якщо обидві посилки правила (1) («*P*» і «**Якщо** *P*, **то** *Q*») істинні, висновок «*Q*» не може бути хибним, інакше при «*P*» істинному і «*Q*» хибному умова «Якщо *P*, то *Q*» виявилась би хибною.

Аналогічно, коли обидві посилки правила (2) («*P*» і «*Q*») істинні, висновок «*P* і *Q*» не може бути хибним, інакше одна з посилок «*P*» і «*Q*» виявилась би хибною.

Правило (1) називається **правилом висновку** (ПВ), правило (2) — **введенням кон'юнкції** (ВК).

Тепер ми можемо зняти всі знаки запитання. Одержимо повний запис доведення в такому вигляді:

№ п/п	Доведення	Аналіз доведення
1	MN — серединний перпендикуляр AD	За побудовою
2	Якщо MN — серединний перпендикуляр AD, то $S_{MN}(A) = D$	Р. д. т.
3	$S_{MN}(A) = D$	1, 2, ПВ
4	Якщо $S_{MN}(A) = D$, то $S_{MN}(ABCD) = (DCBA)$	Р. д. т.
5	$S_{MN}(ABCD) = (DCBA)$	3, 4, ПВ
6	Якщо $S_{MN}(ABCD) = (DCBA)$, то $S_{MN}(C) = B$	Властивості симетрії
7	$S_{MN}(C) = B$	5, 6, ПВ
8	$S_{MN}(A) = D$ і $S_{MN}(C) = B$	3, 7, ВК
9	Якщо $S_{MN}(A) = D$ і $S_{MN}(C) = B$, то $S_{MN}(AC) = DB$	Властивості симетрії
10	$S_{MN}(AC) = DB$	8, 9, ПВ
11	Якщо $S_{MN}(AC) = DB$, то $AC = DB$	За означенням
12	$AC = DB$	10, 11, ПВ

Це ж доведення можна побудувати за допомогою дещо іншої логіки, крім ПВ і ВК, використовуючи і правило силогізму (ПС):

№ п/п	Доведення	Аналіз доведення
1	MN — серединний перпендикуляр AD	За побудовою
2	Якщо MN — серединний перпендикуляр AD, то $S_{MN}(A) = D$	Р. д. т.
3	$S_{MN}(A) = D$	1, 2, ПВ
4	Якщо $S_{MN}(A) = D$, то $S_{MN}(ABCD) = (DCBA)$	Р. д. т.
5	Якщо $S_{MN}(ABCD) = (DCBA)$, то $S_{MN}(C) = B$	Властивості симетрії
6	Якщо $S_{MN}(A) = D$, то $S_{MN}(C) = B$	4, 5, ?
7	$S_{MN}(C) = B$	3, 6, ПВ
8	$S_{MN}(A) = D$ і $S_{MN}(C) = B$	3, 7, ВК
9	Якщо $S_{MN}(A) = D$ і $S_{MN}(C) = B$, то $S_{MN}(AC) = DB$	Властивості симетрії
10	Якщо $S_{MN}(AC) = DB$, то $AC = DB$	За означенням
11	Якщо $S_{MN}(A) = D$ і $S_{MN}(C) = B$, то $AC = DB$	9, 10, ?
12	$AC = DB$	8, 11, ПВ.

Яке ж нове правило виводу позначено поки що знаком запитання? Неважко помітити, що в обох випадках застосування поки що невідомого правила нам потрібно, щоб із двох посилок виду

«Якщо P, то Q» і **«Якщо Q, то R»**

можна було зробити висновок

«Якщо P, то R»,

тобто в наведеному вище записі доведення виникає необхідність в застосуванні правила виведення:

$$\frac{\text{«Якщо } P\text{, то } Q\text{»; «Якщо } Q\text{, то } R\text{»}}{\text{«Якщо } P\text{, то } R\text{»}},$$

яке називається **правилом силогізму** (ПС).

Довести, що таке правило допустимо, можна способом «від супротивного».

Припустимо, що з посилок «якщо P, то Q» і «якщо Q, то R» не слідує висновок «якщо P, то R», тобто можливий випадок, коли обидві посилки істинні, а висновок хибний. Але твердження «якщо P, то R» хибне лише в одному випадку, коли «P» = І і «R» = Х. В цьому випадку, оскільки «R» = Х, а «якщо Q, то R» повинно бути істинним, то «Q» = Х; через те що «якщо P, то Q» істинне, то і «P» = Х. Отже, ми одержали протиріччя («P» = І, «P» = Х). Значить, наше при-

пущення, що висновок «якщо P, то Q» не слідує з посилок «якщо P, то Q» і «якщо Q, то R», неправильне і правило силогізму обгрунтовано. Це означає, що будь-яке міркування, побудоване за цим правилом (за цією схемою), правильне, тобто не може привести від істинних посилок до хибного висновку.

За допомогою правил виведення, що ми їх вже маємо (ПВ, ВК, ПС), можна записати і повну форму доведення II:

№ п/п	Доведення	Аналіз доведення
1	Якщо $ABCD$ — прямокутник, то $\angle A = \angle D = 90°$	За означенням
2	$ABCD$ — прямокутник	Посилка
3	$\angle A = \angle D$	1, 2, ПВ
4	Якщо $ABCD$ — прямокутник, то $AB = CD$	Р. д. т.
5	$AB = CD$	2, 4, ПВ
6	$AD = AD$	Рефлексивні рівності
7	$AB = CD$ і $AD = AD$	5, 6, ВК
8	$AB = CD$ і $AD = AD$ і $\angle A = \angle D$	7, 3, ВК
9	Якщо $AB = CD$ і $AD = AD$ і $\angle A = \angle D$, то $\triangle ABD = \triangle ACD$	Р. д. т.
10	$\triangle ABD = \triangle ACD$	8, 9, ПВ
11	$\triangle ABD = \triangle ACD$ і $\angle A = \angle D$	10, 3, ВК
12	Якщо $\triangle ABD = \triangle ACD$ і $\angle A = \angle D$, то $AC = BD$	Р. д. т.
13	$AC = BD$	11, 12, ПВ

Як бачимо, два різні способи доведення (I і II) властивості діагоналей прямокутника в розглянутій повній формі мають приблизно однакову довжину доведення.

Ми показали одну з можливих методик виявлення і роз'яснення найпростіших схем дедуктивних міркувань (правил виведення) за допомогою логічного аналізу доведень. Цей аналіз проводиться за трьохступеневою схемою: 1) стисле змістовне доведення записується у вигляді послідовності тверджень (в цьому записі звичайно відсутні перші посилки міркувань, з яких складається доведення, тобто наслідки з означень, аксіоми, раніше доведені теореми, умови доводжуваної теореми, які мають на увазі); 2) одержана послідовність тверджень доповнюється не висловленими в явній формі посилками; 3) з'ясовується, які правила виведення потрібні, щоб можна було стверджувати, що доводжуване твердження доведено.

В такий же спосіб можна роз'яснити й інші правила виведення, які мають широке застосування (в неявній формі):

$$\frac{\text{«якщо } A\text{, то } B\text{», «не } B\text{»}}{\text{«не } A\text{»}}$$ (правило заперечення — ПЗ);

$$\frac{\text{«якщо } A\text{, то } B\text{»}}{\text{«якщо не } B\text{, то не } A\text{»}}$$ (правило контрапозиції — ПК);

$$\frac{\text{«якщо } A \text{ і } B\text{, то } C\text{»}}{\text{«якщо } A \text{ і не } C\text{, то не } B\text{»}}$$ (правило розширеної контрапозиції — ПРК);

$$\frac{\text{«якщо } \Gamma,\ A \to B\text{»};\ \text{«}\Gamma, A \Rightarrow \text{не } B\text{»}}{\text{«}\Gamma \to \text{не } A\text{»}}$$ (зведення до абсурду — ЗА)

та деякі інші.

ПК і ЗА широко застосовуються в непрямих доведеннях, про які йтиметься далі. В правилі зведення до абсурду «Г» позначає деякий список посилок, який, зокрема, може виявитися і порожнім, а «⇒» — слідування.

Навчання дедукції, що вимагає роз'яснення найпростіших схем дедуктивних міркувань, які неявно застосовуються в доведеннях, є необхідною **умовою** успішного застосування дедукції як методу навчання, методу здобування нових знань. В цьому переконує велика кількість помилкових міркувань, які допускаються учнями внаслідок зневажливого відношення до цієї умови в процесі навчання.

Необхідно навчати не тільки правильно будувати дедуктивні міркування, а й розпізнавати неправильно побудовані. Це має не абияке важливе освітнє і виховне значення.

Наприклад, учень «довів», що числа 14 і 15 взаємно прості в такий спосіб:

$$\frac{\text{«Якщо } a \text{ і } b \text{ — взаємно прості числа, то НСД } (a,\ b) = 1,\ \text{НСД } (14;\ 15) = 1}{\text{Отже, числа 14 і 15 — взаємно прості».}}$$

Логічний аналіз цього міркування дозволяє подати його у вигляді ланцюжка з двох міркувань, тобто такої послідовності з двох міркувань, що висновок першого є посилкою в другому:

I. $$\frac{\text{«Якщо } a \text{ і } b \text{ — взаємно прості числа, то НСД } (a,\ b) = 1.}{\text{Отже, якщо 14 і 15 — взаємно прості числа, то НСД } (14;\ 15) = 1\text{».}}$$

II. $$\frac{\text{«Якщо 14 і 15 — взаємно прості числа, то НСД } (14;\ 15) = 1;\quad \text{НСД } (14;\ 15) = 1}{\text{Отже, числа 14 і 15 — взаємно прості».}}$$

Міркування I правильне. Воно побудовано за правилом контрапозиції:

$$\frac{\text{«}\forall\, a, b\ A\ (a, b)\text{»}}{\text{«}A\ (14;\ 15)\text{»}}$$

(в посилці цього міркування мають на увазі квантори загальності від змінних a і b).

Міркування ж II побудоване за схемою:

$$\frac{\text{«Якщо } A\text{, то } B\text{»};\ \text{«}B\text{»}}{\text{«}A\text{»}}.$$

Легко показати, що так міркувати не можна (при «A» = Л і «B» = І обидві посилки істинні, а висновок хибний).

За допомогою таких «міркувань», тобто міркувань, побудованих за такою схемою, можна довести що завгодно, навіть і те, що довільний чотирикутник — паралелограм («Якщо $ABCD$ — паралелограм, то $ABCD$ — чотирикутник; $ABCD$ — чотирикутник; отже, $ABCD$ — паралелограм»), що будь-яке дерево — береза («Якщо це береза, то це — дерево; це — дерево; отже, це — береза») і що в аудиторії сидять ведмеді («Якщо в аудиторії сидять ведмеді, то в аудиторії сидять живі істоти; в аудиторії сидять живі істоти; отже, в аудиторії сидять ведмеді») і т. д.

В математиці і в навчанні математики часто використовуються різні варіанти непрямого (опосередкованого) доведення, відомого з шкільного курсу під не зовсім відомою назвою доведення методом «від противного».

Розглянемо логічні основи непрямого доведення. Непряме (опосередковане) доведення деякої теореми Т полягає в тому, що виходять із заперечення Т, яке називають припущенням непрямого доведення (ПНД), і виводять із нього хибний висновок за допомогою застосування (частіше неявного) правила зведення до абсурду (ЗА).

Заперечення «$\overline{\text{Т}}$» доводжуваного твердження «Т» приєднується до посилок і встановлюється (за допомогою доведення) слідування

$$\text{«Г, } \overline{\text{Т}} \Rightarrow \overline{A}\text{, де Г} \Rightarrow A\text{»}.$$

За властивостями слідування, так як $\Gamma \Rightarrow A$, маємо також

$$\text{«Г, } \overline{\text{Т}} \Rightarrow A\text{»}.$$

Але з «Г, $\overline{\text{Т}} \Rightarrow \overline{A}$» і «Г, $\overline{\text{Т}} \Rightarrow A$» (за правилом ЗА) одержуємо «$\Gamma \Rightarrow \overline{\overline{\text{Т}}}$», або «$\Gamma \Rightarrow$ Т», тобто «Т» — теорема (теорема доведена). Часто непряме доведення доводять до суперечності, тобто до кон'юнкції виду «A і $\overline{A}$», при цьому доведення закінчується ствердженням «одержана суперечність доводить теорему».

Встановимо точний смисл цих слів, що означає «суперечність доводить теорему». Встановлене слідування «Г, $\overline{\text{Т}} \Rightarrow A$ і $\overline{A}$», і через те, що висновок «A і $\overline{A}$» хибний, то принаймні одна з посилок хибна (якщо всі посилки істинні, висновок не може бути хибним). Але всі посилки з «Г» істинні. Отже, хибна посилка «$\overline{\text{Т}}$», а значить, «Т» істинне, тобто теорема доведена.

Оскільки в шкільному навчанні доводжуване твердження досить часто подають у вигляді імплікації «Т» «якщо A, то B», то ПНД в такому випадку буде: «неправильно, що коли A, то B», або рівносильне твердження «A і $\overline{B}$».

Із посилок Г, A і $\overline{B}$ треба вивести суперечність, або одержати як наслідок твердження, що являє собою заперечення відомого істинного твердження.

Наведемо приклад аналізу непрямого доведення. Нехай a, b, c — різні прямі в площині і потрібно довести твердження «Т»:

$$\text{«Якщо } a \parallel c \text{ і } b \parallel c\text{, то } a \parallel b\text{»}. \qquad (1)$$

$$\text{ПНД: } a \parallel c \text{ і } b \parallel c \text{ і } a \nparallel b. \qquad (2)$$

Із ПНД (за правилом виведення кон'юнкції — ВК) одержимо

$$a \parallel c \text{ і } b \parallel c, \tag{3}$$

$$a \nparallel b. \tag{4}$$

За означенням паралельних прямих одержуємо:

$$\text{Якщо } a \nparallel b, \text{ то } \exists C(C \in a \text{ і } C \in b). \tag{5}$$

Із (4) і (5) за ПВ запишемо

$$\exists C(C \in a \text{ і } C \in b). \tag{6}$$

Із (3) і (6) за ВК:

$$a \parallel c \text{ і } b \parallel c \text{ і } \exists C(C \in a \text{ і } C \in b). \tag{7}$$

Але за аксіомою паралельних, що належать множині посилок Г,

$$\textbf{неправильно, що } a \parallel c \text{ і } b \parallel c \text{ і } \exists C(C \in a \text{ і } C \in b). \tag{8}$$

Отже, ми встановили слідування

$$\Gamma,\ a \parallel c,\ b \parallel c,\ a \nparallel b \Rightarrow (7) \text{ і } (8),$$

тобто з наших припущень ми вивели суперечність «(7) і (8)», яка й доводить теорему.

Одна з найпростіших форм непрямого доведення заснована на використанні контрапозиції, тобто замість того, щоб довести теорему «Якщо A, то B», доводять рівносильне твердження «Якщо $\overline{B}$, то $\overline{A}$». Наприклад, замість того, щоб доводити твердження «Якщо внутрішні різносторонні кути, утворені при перетині прямих a і b січною c, рівні, то прямі a і b паралельні», доводять рівносильне твердження (контрапозицію): «Якщо прямі a і b (в площині) не паралельні, то внутрішні різносторонні кути, утворені при перетині цих прямих січною, не рівні».

Існує чимало спеціальних форм непрямого доведення. Розглянемо форму, відому під назвою доведення **методом виключення**, яка часто зустрічається в практиці доведення.

Припустимо, що нам треба довести твердження «Якщо P, то Q_1», тобто встановити, що «Г, $P \Rightarrow Q_1$». Поруч з висновком «Q_1» розглядаються всі останні можливості («Q_2», «Q_3», ..., «Q_n»), тобто такі, що

$$\textbf{«}Q_1 \textbf{ або } Q_2 \textbf{ або } \ldots \text{ або } Q_n \in \Gamma\textbf{»},$$

тобто є аксіомою, означенням, раніше доведеною теоремою, або висновком із них. Потім доводять, що кожна з останніх можливостей «Q_2», ..., «Q_n» приводить до суперечності і, таким чином, одержують «$\overline{Q_2}$ і $\overline{Q_3}$ і ..., і $\overline{Q_n}$» або рівносильне твердження

$$\textbf{«неправильно, що } Q_2 \textbf{ або } Q_3 \textbf{ або } \ldots \textbf{ або } Q_n\textbf{»}.$$

Із «Q_1 **або** Q_2 **або** Q_3 **або** ... **або** Q_n» і «**неправильно, що** Q_2 **або** Q_3 **або** ... **або** Q_n», застосовуючи правило виключення диз'юнкції (ВД із «A **або** B» і «$\overline{B}$» слідує «A»), одержимо «Q_1».

Як ілюстрацію виконаємо логічний аналіз доведення методом виключення теореми: «Якщо будь-яка площина, що перетинає пряму a,

перетинає і пряму b, то ці прямі паралельні». Потрібно встановити слідування:

«Г, $P \Rightarrow Q_1$»; «Г», «$\forall \alpha$ (Якщо $\alpha \times a$, то $\alpha \times b$) $\Rightarrow a \parallel b$»

(«$\alpha \times a$» позначає речення «Площина α перетинає пряму a»).

Виходимо з твердження

«Q_1 **або** Q_2 **або** Q_3: $a \parallel b$ **або** $a \times b$ **або** $a \div b$», (1)

яке належить Г («$\div$» позначає відношення мимобіжності прямих).

Припущення Q_2: $a \times b$ дає $\exists \alpha (\alpha \times a$ і $\overline{\alpha \times b})$ (достатньо провести довільну площину α через b, відмінну від площини, означуваної прямими a, b, що перетинаються між собою) або, через те що $\exists \alpha (\alpha \times a$ і $\overline{\alpha \times b}) \Rightarrow \overline{\forall} \alpha$ (Якщо $\alpha \times a$, то $\alpha \times b$), одержуємо:

«Якщо Q_2, то $\overline{P}$»; «якщо $a \times b$, то $\overline{\forall} \alpha$ (Якщо $\alpha \times a$, то $\alpha \times b$)». (2)

Із «Якщо Q_2, то $\overline{P}$» і «P» за ПЗ (правилом заперечення: «Якщо A, то B» і $\overline{B}$ слідує $\overline{A}$) одержуємо:

$$\overline{Q}_2\text{: } \overline{a \times b}. \tag{3}$$

Аналогічно припущення Q_3: $a \div b$ приводить до

$$\overline{\forall} \alpha \text{ (Якщо } \alpha \times a, \text{ то } \alpha \times b) \tag{4}$$

(достатньо через b і яку-небудь точку прямої a провести площину).

Одержуємо з «Якщо Q_3, то $\overline{P}$» і «P» за ПЗ;

$$\overline{Q}_3\text{: } \overline{a \div b}. \tag{5}$$

Із (3) і (5) за ВК одержуємо $\overline{Q}_2$ і $\overline{Q}_3$, або рівносильно твердження **неправильно, що Q_2 або Q_3:**

неправильно, що $a \times b$ **або** $a \div b$. (6)

Із (1) і (6) за ВД одержуємо: Q_1: $a \parallel b$.

Метод математичної індукції — спеціальний метод доведення, який застосовують до тверджень типу

$$\text{«}\forall x \in N\, P(x)\text{»} \tag{1}$$

(тобто до тверджень, які виражають деяку властивість, що має кожне натуральне число) або

$$\text{«}\forall x \in N \text{ (якщо } x > k, \text{ то } P(x))\text{»} \tag{2}$$

(кожне натуральне число більше деякого натурального числа k).

Оскільки безпосередня перевірка наявності властивості «P» у кожного натурального числа або в кожного натурального числа, більшого k, неможлива через нескінченність множини N, то роблять це так: встановлюють наявність цієї властивості для числа 1, тобто істинність твердження «P (1)», і доводять, що з припущення про наявність її в деякого x слідує наявність цієї властивості і в безпосередньо наступного числа $x + 1$. Після цього роблять висновок про істинність твердження (1) або (2), тобто що властивість «P» має кожне натуральне число або кожне натуральне число $x > k$.

Як бачимо, в цьому міркуванні використано правило виведення:

$$\frac{P(1);\ P(x) \Rightarrow P(x+1)}{\forall x P(x)};$$

його називають **правилом індукції**.

Основою цього правила є аксіома **математичної індукції**, одна з аксіом, яка характеризує структуру натурального ряду: «Якщо число 1 має властивість P і для деякого x із того, що число x має цю властивість, слідує, що й безпосередньо наступне за ним натуральне число $x + 1$ теж має цю властивість, то кожне натуральне число має властивість P» (або: «Якщо число k має властивість P і для довільного $x > k$ із того, що число x має цю властивість, слідує, що й безпосередньо натуральне за ним натуральне число $x + 1$ має цю властивість, то кожне натуральне число, більше k, має властивість P»).

Проілюструємо метод математичної індукції на простому (шкільному) прикладі. Нехай треба довести твердження

$$\text{«}\forall x \in N\, P(x) \text{: } \forall x \in N\, (1 + 2 + 3 + \cdots + x = \frac{x(x+1)}{2}\text{»}.$$

Таким чином,

$$\text{«}P(x) \text{: } 1 + 2 + 3 + \cdots + x = \frac{x(x+1)}{2}\text{»}. \qquad (1)$$

Підставивши 1 замість x в (1), одержимо $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$, тобто «$P(1)$» — істинне висловлення.

Нехай тепер (1) правильне для довільного x. Доведемо, що (1) правильне і для $x + 1$, тобто що

$$\text{«}1 + 2 + 3 + \cdots + x + (x+1) = \frac{(x+1)((x+1)+1)}{2}\text{»}.$$

Дійсно,

$$\text{«}1 + 2 + 3 + \cdots + x + (x+1) = \frac{x(x+1)}{2} + (x+1) =$$

$$= \frac{x(x+1) + 2(x+1)}{2} = \frac{(x+1)(x+2)}{2}\text{»}.$$

Таким чином, ми довели, що «$P(x) \Rightarrow P(x+1)$»; за правилом індукції робимо висновок про істинність твердження (1) для кожного $x \in N$.

Загальну схему доведення методом математичної індукції можна подати в такий спосіб:

1. «$P(1)$» — встановлюється перевіркою.
2. «$P(x) \Rightarrow P(x+1)$» — доводиться.
3. «$\forall x \in N\, P(x)$» — слідує з (1) і (2) за правилом індукції.

У практиці шкільного навчання математики найчастіше використовують пряме доведення. Вище ми вказали, що в практиці завжди застосовують змістовні доведення в стислому вигляді. Ми теж показали два приклади звичайних стислих (згорнених) доведень (теореми про

діагоналі прямокутника), за допомогою логічного аналізу яких ми поступово перейшли до логічно повних (розгорнутих) доведень (цієї теореми). Потім ми уточнили поняття непрямого доведення.

Таким чином, уточнене (логічно повне, змістовне) доведення відрізняється від формального доведення тільки тлумаченням використовуваної логіки. В першому випадку використовувані правила виведення інтерпретуються як правила слідування, що встановлюються на основі відношення семантичного слідування з застосуванням значень істинності. У другому правила виведення ніяк не інтерпретуються і встановлюються на основі логічних аксіом та вихідних правил.

Зіставимо тепер логічно повне доведення з стислим (згорнутим) доведенням, яке застосовується в практиці для виявлення основних відмінностей між ними.

Логічне повне доведення	*Стисле (згорнуте) доведення*
1. Точне поняття.	1. Інтуїтивне поняття.
2. Включає всі посилки.	2. Опускає деякі, зокрема, загальні посилки.
3. Не опускає ніяких проміжних міркувань.	3. Опускає окремі кроки (проміжні міркування).
4. Явно вказує використовувані правила виведення.	4. Не фіксує використовувану логіку.

Так само, як перехід від стислого доведення до логічно повного неоднозначний (останнє можна побудувати з використанням різних правил виводу), зворотний перехід — від логічно повного до згорненого доведення — є неоднозначним. Виходячи з певного логічно повного доведення деякої теореми, можна будувати різні згорнуті доведення цієї теореми, тобто повне доведення можна по-різному згортати, по-різному робити стислими, коротшими. Цим доведенням, які відрізняються кількістю пропущених кроків, інколи приписують різні **рівні строгості**. Можна говорити, очевидно, і про вищий, допустимий для даного етапу навчання рівень, виходячи з можливостей учнів. Як бачимо, поняття рівня строгості доведення має в якійсь мірі прагматичний характер, відображаючий відношення між доведенням і тим, хто його шукає, будує, засвоює. Якщо доведення знаходиться нижче деякого «граничного знизу» рівня строгості, воно, по суті, перестає бути доведенням і тільки таке «доведення» можна назвати «нестрогим». Таким чином, нестроге доведення це не доведення. Питання ж про рівні строгості доведень, адекватних різним етапам навчання — важлива психолого-педагогічна проблема. Справа в тому, що навіть незначне підвищення цього рівня (звичайно без досягання якоїсь абсолютної логічної повноти і строгості, яку не можна досягти в застосовуваних доведеннях) приводить до значного ускладнення доведення, роблячи його незрозумілим для учнів.

Не заперечуючи методичних переваг відомих підручників А. П. Кисельова, не можна не відмітити, що одним з істотних недоліків був той, що рівень строгості доведень в цих підручниках був приблизно однаковим для учнів VI і IX класів, часто був занадто високий

і недоступний для шестикласників і занадто низький для дев'ятикласників.

Багаторічною практикою встановлено, а психологією обгрунтовано, що рівень строгості доведень повинен бути адекватним віковим можливостям учнів. Шкільний підручник і методику викладання слід розробляти з урахуванням цього психологічного фактору. Не можна одержати результат процесу до того, поки він не сформований.Процес доведення — складний процес мислення і формується лише поступово, від простих до більш складних структур. Цьому повинні відповідати поступове ускладнення доведення, поступове підвищення його рівня строгості. Такими є закономірності мислення, які обумовлюють і закономірності навчання.

Вище ми говорили про доведення як про готову конструкцію. Однак навчання доведенню — педагогічна проблема, яка включає не лише аналіз готових доведень. Це перш за все проблема навчання **пошуку** доведення та його коректної побудови. Завдання полягає не в тому, щоб учні завчили окремі готові доведення, що викладені в підручнику і пояснені вчителем на уроці, а в тому, щоб навчити їх **доводити**. Якщо мати на увазі, що доводити означає міркувати, то неважко оцінити значення цього завдання, його розв'язання в процесі навчання математики.

Враховуючи роль доведень в математиці (один відомий математик говорив, що «доведення в математиці не все, але без нього в ній немає нічого») і в засвоєнні математичних знань, методи навчання доведенню доречно віднести до методів навчання математики (розд. 4).

Завдання «довести твердження: ....» належить одному з найважливіших класів нестандартних задач, а питання про пошук доведення — частковий випадок загального питання пошуку розв'язання задач. Методичне розв'язання цього питання — істотний елемент методики розвитку творчого мислення учнів. Це питання розглядається в наступному розділі.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Беляев Е. А.* Некоторые особенности развития математического знания. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1975.
2. *Болтянский В. Г.* Как устроена теорема? // Математика в школе. 1975.№ 5.
3. *Колмогоров А. Н.* О системе основных понятий и обозначений для школьного курса математики // Математика в школе. 1971. № 2.
4. *Пойа Д.* Математика и правдоподобные рассуждения / Пер. с англ. М.: Наука, 1957.
5. *Рузавин Т. И.* О природе математического знания. М.: Мысль, 1976.
6. *Сохор А. М.* Логическая структура учебного материала. М.: Педагогика, 1974.
7. *Столяр А. А.* Педагогика математики. Минск: Высш. шк., 1974.
8. *Середа В. Ю.* Математична логіка в шкільному курсі математики. К.: Рад. шк., 1984.
9. *Середа В. Ю.* Вчись мислити логічно. К.: Рад. шк., 1989.
10. *Следзінський І. Ф., Тесленко І. Ф.* Метричні простори в шкільному курсі математики К.: Рад. шк., 1978.
11. *Хинчин А. Я.* Педагогические статьи. М.: Изд-во АПН РСФСР, 1963.

РОЗДІЛ 4

МЕТОДИ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ

Одним з центральних місць в дидактиці (загальній теорії навчання) і в методиці викладання математики (конкретній теорії навчання, де враховується специфіка математики як навчального предмету) займають методи навчання. Володіння цими методами необхідне для організації ефективного навчання школярів.

Як навчальний предмет «математика» має особливі риси, які притаманні тільки їй. Головною з них є високий ступінь узагальненості понять, що вивчаються. Ця риса виявляється буквально відразу, при першому ж знайомстві з математикою на уроках. Ось тому в процесі навчання необхідно використовувати різні методи, які відображають цю особливість, і при формуванні математичних понять, і при знайомстві з задачами, що виникають при використовуванні цих понять в практичній і навчальній діяльності. Істотно відмітити, що зазначені методи сприяють розвитку мислення школярів, підвищують їх загальну культуру, здібності до переносу понять і прийомів, сформованих на уроках математики, в процес вивчення інших навчальних предметів. Це виникає тому, що до ієрархії методів навчання математики належать такі найважливіші теоретичні методи, як використання спостереження, порівняння і аналогії, застосування індуктивних і дедуктивних умовиводів, аналіз, синтез. У цьому розділі йдеться про зазначений тут перелік методів, а також розглянуто спеціальні методи навчання математики.

§ 1. ПРОБЛЕМА МЕТОДІВ НАВЧАННЯ

Проблема методів навчання формулюється коротко за допомогою питання, **як учити?**

Для розв'язання питання про те, як учити чому-небудь учнів, треба, по-перше, з'ясувати, для чого потрібно це вивчати, які знання, вміння і навички слід набути учням внаслідок цього вивчення; по-друге, треба провести логіко-дидактичний аналіз того, що вивчається, тобто виявити структуру та інші особливості змісту навчання, його виклад у шкільному підручнику; по-третє, треба знайти об'єкт навчання, тобто рівень розумової діяльності учнів, які вони мають знання, уміння і навички, на які можна спиратися в навчанні їх даному змісту.

Тільки при наявності достатньої інформації з питань, **для чого? чому?** і **кого?**, ми можемо успішно розв'язати і питання, **як?**, тобто питання про вибір адекватних методів навчання, які найкраще відповідають цілям, змісту навчання і рівню розумової діяльності і знань учнів.

Таким чином, проблема методів навчання розв'язується з урахуванням мети навчання, специфіки, структури змісту (як навчального предмету в цілому, так і окремих його розділів, тем, понять, тверджень) і особливостей розумової діяльності учнів, стану вже одержаних ними в процесі попереднього навчання знань, вмінь і навичок.

Говорячи про **методи навчання математики**, природно перш за все уточнити це поняття. В дидактичній літературі зустрічаються різні означення про роз'яснення поняття «метод навчання», що відображає різні точки зору на це основне поняття теорії навчання.

Ми не будемо обговорювати і порівнювати ці означення і точки зору. Ми будемо виходити з досить широко розповсюдженого і інтуїтивно зрозумілого уявлення про методи навчання як про впорядковані способи взаємопов'язаної діяльності вчителя і учнів, спрямованих на досягнення цілей навчання як засобу освіти і виховання.*

Виходячи з такого розуміння методів навчання, опис кожного з них повинен включати: 1) опис навчальної діяльності вчителя; 2) опис навчальної (пізнавальної) діяльності учня; 3) зв'язок між ними, або спосіб, яким навчаюча діяльність вчителя керує пізнавальною діяльністю учнів.

Предметом дидактики є, однак, тільки загальні методи навчання, тобто методи, які узагальнюють повну сукупність систем послідовних дій вчителя і учня у взаємодії викладання і учіння, які не враховують специфіки окремих навчальних предметів.

Дослідження можливостей конкретної реалізації розроблених дидактичних загальних методів у навчанні математики шляхом їх модифікації з урахуванням специфіки математики і розумової діяльності учнів різних вікових періодів є предметом методики викладання математики.

Крім конкретизації і модифікації загальних методів навчання з урахуванням специфіки математики, предметом методики є також доповнення цих розділів спеціальними (частковими) методами навчання, що відображають основні методи пізнання, які використовуються в самій математиці.

Постановка проблеми відображення методів науки в навчанні цілком виправдана. По-перше, цілі навчання включають засвоєння не лише визначеної сукупності наукових фактів, а й методів добування цих фактів, які використовуються в самій науці. По-друге, методи наукових досліджень — це методи добування нових знань в навчальній (пізнавальній) діяльності. Тому цілком природно, щоб методи навчання відображали методи пізнання, використовувані в даній науці, безумовно, у відповідній, пристосованій для навчання формі, щоб процес навчання був у якійсь мірі подібним процесу дослідження.

Спеціальні методи навчання, які відображають методи самої науки, мають найбільший вплив на формування і розвиток математичного мислення учнів, тобто, мислення, стиль і структура якого специфічні для математики. Таке мислення, з одного боку, необхідне для успішного засвоєння математики, з другого — само розвивається внаслідок цілеспрямованої постановки навчання, в якому поруч з загальними використовуються і загальні методи навчання.

---

* Див.: Педагогика: Совместный труд АПН СССР и АПН ГДР. М.: Просвещение, 1978. С. 345; Зверев И. Д. Состояние и перспективы разработки проблемы методов обучения в современной школе // Проблемы методов обучения в современной общеобразовательной школе. М.: Педагогика, 1980. С. 7.

Таким чином, система методів навчання математики складається із загальних методів, розроблених дидактикою, адаптованих до навчання математики, та із спеціальних (часткових) методів навчання математики, що відображають основні методи пізнання, які використовуються в математиці.

Одно із завдань, поставлених перед народною освітою, полягає в тому, щоб *привести самі методи навчання у відповідність з вимогою життя.*

Що це означає? В сучасних умовах, коли обсяг необхідних для людини знань різко і швидко зростає, вже не можна робити головну ставку на засвоєння певної суми фактів. Важливо прищеплювати вміння самостійно поповнювати свої знання, орієнтуватися в бурхливому потоці наукової і політичної інформації.

Таким чином, завдання оволодіння учнями міцними знаннями, вміннями і навичками доповнюється завданням набування ними помітного інтелектуального потенціалу, необхідного для самостійного відбору і переробки потрібної інформації, найважливішими елементами якої є вміння творчо мислити.

В чому ж невідповідність нерідко застосовуваних в практиці навчання методів вимогам сучасного життя, яка спричинила постановку зазначеного вище завдання?

Застосовувані методи навчання часто орієнтовані головним чином на навчання готовим знанням. Зовні ці методи проявляються в добре відомій формі, коли вчитель викладає, пояснює, роз'яснює навчальний матеріал, використовуючи різні засоби наочності та інші дидактичні засоби, а учні сприймають адресовану їм навчальну інформацію, потім заучують її і за вимогою вчителя відновлюють. При цьому, як правило, залишається невиясненим, чи переробив учень своїм власним розумом цю інформацію. Навчальна діяльність учня в основному є репродуктивною, а головним результатом такого навчання є в кращому випадку засвоєння суми фактів, причому не досить глибоке, а частіше й не міцне. Розвиваючий ефект таких методів навчання досить низький, через те що вони не викликають активної розумової діяльності учнів.

Природно, у всі часи існували, а в наш час тим більше є чимало вчителів, які не обмежують свою навчальну діяльність застосуванням зазначених вище методів навчання. Однак правомірно говорити про ці методи, оскільки вони досить широко застосовуються в практиці.

Приведення методів навчання у відповідність з вимогами життя означає доповнення, розвиток і доцільне поєднання традиційних методів, які себе виправдали на практиці, з методами, головним чином орієнтованими на навчання не готовим знанням, а діяльності в самостійному добуванні нових знань, тобто пізнавальної діяльності.

Ці методи, які можна, зрозуміло, умовно іменувати «сучасними» (в тому розумінні, що вони відповідають вимогам сучасного життя), *не протиставляються* сталим в практиці навчання методам, які можна (теж умовно) іменувати «традиційними». Обидві системи цих методів навчають готовим знанням і пізнавальній діяльності, але одні головним чином орієнтовані на навчання готовим знанням, інші — на навчання пізнавальної діяльності. Мова йде не про те, щоб відкинути

одні з них і замінити їх іншими, а про необхідність дидактично доцільного поєднання в навчанні «традиційних» і «сучасних» методів, виходячи з цілей, специфіки змісту навчання і рівня розумової діяльності учнів.

Висуваючи завдання навчання пізнавальній діяльності в галузі математики, ми повинні перш за все проаналізувати те, що, звичайно, називають **«пізнавальною діяльністю»**. Здійснений психологами аналіз подібної діяльності виявляє три основні компоненти: а) набір загальних логічних прийомів мислення; б) набір спеціальних (в даному випадку для математики) прийомів розумової діяльності; в) система знань.

До загальних логічних прийомів мислення відносяться індукція і дедукція, аналіз і синтез, узагальнення і абстрагування, конкретизація, класифікація. Ці прийоми можна описати і засвоїти з будь-яким змістом. Однак застосування їх у навчанні математики істотно відрізняється від застосування в інших галузях знань. Воно відображає, в одного боку, логіку шкільної математики, з другого — прийоми її засвоєння, тобто встановлює зв'язок між змістом і методами навчання.

Спеціальні для математики прийоми розумової діяльності є основою методів пізнання реального світу, які використовуються в математиці: метод побудови математичних моделей явищ і процесів, що вивчаються, — один із найпліднішних методів пізнання матеріального світу, прогнозування і керування різними процесами; різні, характерні для математики, способи абстрагування, які використовуються, зокрема, при побудові математичних моделей; аксіоматичний метод, що став одним із основних при побудові математичних моделей дійсності. Цей метод (аксіоматичний), прийнятий в математиці, характеризує спосіб встановлення істинності тверджень і відкриває можливість широкого застосування однієї математичної теорії в різноманітних галузях явищ.

Легко помітити, що всі методи пізнання, які використовуються в математиці, в кінці кінців немов би інтегруються в методі побудови математичних моделей об'єктів дійсності, що підлягають вивченню. Це правомірно, оскільки кінцева мета математики — вивчення матеріального світу, зрозуміло, властивими їй методами і засобами. Метод математичного моделювання в наш час широко застосовується в різних галузях знань, і саме через нього математика знаходить все нові й нові застосування.

Система знань є і важливою складовою частиною пізнавальної діяльності, і її результатом. Це пояснюється тим, що формування і розвиток системи знань здійснюються поступовим накопиченням наявних знань у процесі навчальної діяльності за допомогою загальнологічних і спеціальних прийомів мислення, а також тих знань, які одержані попереднім навчанням. На порожньому місці без будь-яких вихідних (початкових, первинних) знань неможлива ніяка пізнавальна діяльність. Ця обставина ще раз стверджує необхідність доцільного поєднання методів навчання готовим знанням з методами навчання діяльності в набутті нових знань.

Вибір і правильне поєднання різних методів навчання в різних конкретних навчальних ситуаціях — складна педагогічна проблема,

розв'язання якої потребує знань, умінь і педагогічної майстерності. Принципово неможливий універсальний метод навчання, який, якщо тільки його строго дотримуватись, гарантує успіх незалежно від специфіки змісту навчання, рівня розумової діяльності учнів, умінь і педагогічної майстерності вчителя.

Загальновідома **функція задач у навчанні математики** і розвитку мислення учнів. Засвоєння математичних знань і рівень математичного розвитку учнів завжди перевірялись, перевіряються і, мабуть, будуть перевірятися за допомогою розв'язування задач. Тому проблема методів навчання математики включає і проблему методів навчання розв'язуванню задач.

Як навчити учнів розв'язувати задачі? Це одна з найскладніших і важливих педагогічних проблем. Їй присвячено спеціальний розділ. Тут ми розглянемо лише підготовку учнів до розв'язування задач різних типів. Шкільна математика, особливо алгебра, багата на різного роду алгоритми для розв'язування стандартних задач самих різних видів, від задач на додавання многозначних чисел («в стовпчик») до задач диференціювання певних класів функцій. Як вивчати ці алгоритми, які становлять досить важливу частину навчального матеріалу? Можна, звичайно, пояснити учням ці алгоритми в готовому вигляді. Це, однак, малоефективна методика. Методи навчання, орієнтовані головним чином на розвиток активної пізнавальної діяльності учнів, є умовою необхідності навчити учнів відшукувати і описувати загальні методи (алгоритми) розв'язування класів однотипних задач за допомогою аналізу і узагальнення способів розв'язування часткових задач, які належать цим класам.

В шкільній математиці є і великий різноманітний клас нестандартних задач (на доведення, перетворення алгебраїчних виразів, розв'язування деяких рівнянь, нерівностей та їх систем і т. п.).

Нестандартні задачі часто зводяться до деяких стандартних задач, і виникає необхідність у використанні відповідних алгоритмів. Таким чином, знання алгоритмів необхідне для розв'язування не тільки стандартних, а й нестандартних задач.

Методи навчання використовуються у взаємозв'язку. Важко виявити в процесі викладання (при вивченні досить змістовного фрагменту навчального матеріалу) застосування лише одного методу в чистому вигляді. Універсального ж методу не існує, і навряд чи можна твердо регламентувати вибір того чи іншого з них. Основою вибору і поєднання різних методів навчання розуміють як об'єктивні фактори (цілі і зміст навчання), так і суб'єктивні (вчитель, учні).

Цілі і зміст навчання не визначають однозначно методи навчання. Один і той самий зміст можна вивчити різними методами, причому так, щоб у всіх випадках були досягнуті цілі навчання. З другого боку, одні й ті самі методи навчання, що застосовуються різними вчителями, можуть дати різні результати, через те що викладання — не тільки наука, але й мистецтво.

У наступних параграфах цього розділу подаються короткі характеристики найважливіших методів навчання математики — загальних, конкретизованих і адаптованих до навчання математики — і спеціальних,

що відображають методи самої математики. При цьому ми будемо розглядати кожний метод ізольовано від інших з метою його вивчення, а також в поєднанні (сполученні) з іншими на конкретному змістові різних тем шкільного курсу математики.

Ми також висловимо деякі міркування про доцільний вибір і органічне поєднання різних методів навчання в залежності від цілей, специфіки і структури змісту навчання. Однак ці міркування (судження) не мають котегоричного характеру і являють собою лише рекомендації.

§ 2. ЕМПІРИЧНІ МЕТОДИ: СПОСТЕРЕЖЕННЯ, ДОСЛІД, ВИМІРЮВАННЯ

Спостереження, дослід, вимірювання — емпіричні методи, які використовуються, зокрема, в експериментальних природничих науках. Математика не являє собою експериментальну науку, тому ствердження дослідом не може бути достатньою основою істинності її положень.

Це, безумовно, правильно, якщо під математикою розуміти сукупність готових, вже побудованих дедуктивних теорій, але це неправильно, якщо під математикою розуміти розумову діяльність, результатом якої є подібні теорії. В останньому випадку дедуктивна теорія лише одна фаза математики. Але вона має ще дві фази: накопичення фактів (дослідницьку, інтуїтивну), яка передує дедуктивній теорії, і наступну за нею фазу застосувань. Ці дві фази незалежно від того, чи вважають їх, власне кажучи, математичними, чи «біляматематичними», не менш важливі в навчанні, ніж сама дедуктивна теорія: перша — для розуміння цієї теорії, друга — для її обгрунтування.

Виходячи з розглянутих вище (§ 1) завдань, що стоять перед школою, мова йде про навчання не лише тільки готовим знанням, а й методам пізнання, які приводять до цих знань. Тому природно застосовувати в навчанні і ті емпіричні методи пізнання, за допомогою яких формулюють гіпотези, що підлягають обгрунтуванню (або заперечити, спростувати) вже іншими методами.

Спостереження, дослід і вимірювання треба спрямовувати на створення в навчальному процесі спеціальних ситуацій і забезпечення учням можливості дістати з них очевидні закономірності, геометричні факти, ідеї доведення і т. п. Найчастіше результати спостереження, досліду і вимірювань є посилками індуктивних висновків, за допомогою яких здійснюються відкриття нових істин. Тому спостереження, дослід і вимірювання відносять до евристичних методів навчання, тобто до методів, що сприяють відкриттям.

Продемонструємо таке застосування спостереження, досліду і вимірювання кількома прикладами.

Якщо показати учням V—VI класів різні фігури, в тому числі оточуючі нас предмети, серед яких одні мають осьову симетрію, а інші її не мають, то спостереження цих фігур дає змогу помітити, що кожна з «симетричних» фігур ділиться деякою прямою на дві частини так, що, коли перегнути фігуру по цій прямій, одна її частина повністю суміститься з другою. Для кожної ж із «несиметричних» фігур такої прямої не можна знайти.

Після такого спостереження «симетричних» фігур навколо нас (архітектурні прикраси, будівельні та інші деталі, деякі листки на деревах і т. д.) можна перейти до наступного вивчення осьової симетрії за допомогою спеціального досліду (експерименту).

Кожному учневі пропонується перегнути аркуш паперу так, щоб одна його частина лягла на другу і утворилась би лінія перегину. Потім пропонується випрямити знову аркуш і відмітити на ньому довільну точку A, що не належить лінії перегину, потім знову перегнути аркуш по тій же лінії перегину і визначити, дивлячись на світло через зігнутий аркуш, з якою точкою сумістилась при цьому точка A. Нехай це точка A_1. Учням повідомляють, що точки A і A_1 називаються симетричними відносно прямої l (лінії перегину). Пряму l називають віссю симетрії цих точок. Для іншої точки B, яка розміщена по іншу сторону від лінії перегину, ніж точка A, пропонується визначити (дослідним шляхом, перегинанням аркуша паперу) симетричну їй точку відносно тієї ж вісі l. Помічаємо, що коли взяти точку C на лінії перегину, вона залишається нерухомою при перегинанні аркуша, тобто не суміщається з жодною іншою точкою аркуша. В цьому випадку ми говоримо, що кожна точка вісі симетрії (лінії перегину) *симетрична сама собі*.

Природно, виникає питання: чим же характеризується розміщення відносно вісі пари симетричних точок (A, A_1), (B, B_1), як це можна описати за допомогою вже відомих геометричних термінів? Учні помічають (можливо, за допомогою вчителя), що симетричні точки, якщо вони різні, завжди лежать по різні сторони від осі симетрії. Пропонується з'єднати симетричні точки відрізком прямої. Учні висловлюють гіпотезу (припущення), що симетричні точки рівновіддалені від осі симетрії, тобто що відрізки AA_1 і BB_1 діляться віссю симетрії пополам. Це припущення стверджується вимірюванням відповідних відрізків. Якщо учні не помічають перпендикулярності відрізка AA_1 (і BB_1) до осі симетрії (звичайно, рівність кутів не так швидко виявляється, як рівність відрізків), то беруть дві точки, рівновіддалені від осі по різні сторони від неї, але не на одному перпендикулярі до неї і ставлять питання: чи будуть ці точки симетричними відносно тієї самої вісі? Порівнюючи розміщення точок з розміщенням симетричних точок, учні встановлюють, що останні лежать на одному перпендикулярі до вісі симетрії. Це поки що припущення, яке теж стверджується вимірюванням відповідних кутів.

Якщо з'єднати відрізками точки A і B із симетричними їм точками A_1 і B_1, то при перегинанні аркуша паперу до лінії l відрізок AB суміститься з відрізком A_1B_1, тобто виявиться, що віддаль між двома точками A і B дорівнює віддалі між симетричними їм точками A_1 і B_1.

Експериментально виявляється також і те, що кожна з одержаних площин з границею l «накладається» (перетворюється, відображається) на іншу.

Таким чином, за допомогою спостереження, досліду і вимірювань формується уявлення про осьову симетрію як про перетворення площини, при якому кожній точці співставляється симетрична їй відносно вісі l точка і ми одержуємо можливість описати осьову симетрію на

вже відомій учням геометричній мові за допомогою такої сукупності тверджень.

(p_1) Кожна точка вісі симетрії симетрична сама собі. Кожні дві різні симетричні точки лежать:

(p_2) по різні сторони від осі симетрії,

(p_3) на одному перпендикулярі до осі і

(p_4) на однаковій віддалі від осі.

(p_5) Віддаль між будь-якими двома точками дорівнює віддалі між симетричними їй точками.

(p_6) Кожна з півплощин з границею l перетворюється в іншу.

Одержаний опис нашого досліду (експерименту) не є, однак, досконалим. По-перше, всі твердження p_1—p_6 «обгрунтовані» лише за допомогою досліду. По-друге, ще не розкриті логічні зв'язки між ними, не встановлено, які з цих тверджень можуть бути посилками для виведення з них останніх тверджень цієї сукупності (за допомогою, можливо, і деяких інших, уже відомих геометричних істин).

Однак усунення цих дефектів нашого опису вимагає вже застосування інших методів, про які мова піде далі.

Наведемо приклад, коли дослід сприяє можливості відкрити геометричну властивість і підказує спосіб її доведення.

Експериментально встановити, що сума кутів даного трикутника дорівнює 180°, можна відразу, які тільки учні навчаться вимірювати кути за допомогою транспортира.

Учням пропонують виміряти транспортиром кути накресленого в зошитах трикутника і результати вимірювання додати. В декого сума кутів трикутника буде менше 180°, в інших — більше, але в усіх результати близькі до 180°, а в декого навіть і «точно» 180° (!). Учні здогадуються, що повинно вийти 180°, а інші результати пояснюються похибками вимірювання. Вони «здійснюють відкриття»: «В кожному трикутнику сума внутрішніх кутів дорівнює 180°».

Це припущення стверджується другим дослідом, який підказує ідею доведення (одного з можливих доведень).

Кожний школяр має заготовлений вирізаний з паперу трикутник. Вчитель пропонує «відірвати» два кути і прикласти їх до третього так, як це він робить сам на великому трикутнику (рис. 13, 14).

Учні помічають, що одержані три кути з спільною вершиною A, розміщені по одну сторону від прямої. Отже, сума цих кутів дорівнює 180°. За допомогою такого досліду (вже без вимірювань) ми прийшли до тієї ж гіпотези, і всім здається, що знайдена властивість достовір-

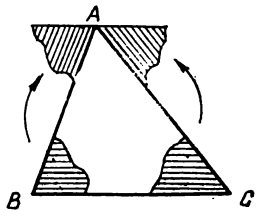


Рис. 13

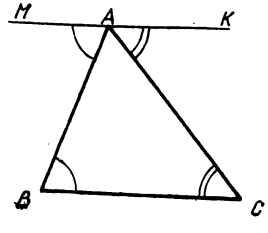


Рис. 14

на (вірогідна). Але чи можна бути впевненим в тому, що два промені, які сходяться в точці A, утворять пряму лінію? Адже вони можуть утворити ламану, яка так мало відрізняється від прямої, що ми можемо цього і не помітити. А в цьому випадку сума кутів уже не буде дорівнювати 180°.

Таким чином, здійснений дослід не заміняє доведення. Він лише підказує один з можливих способів доведення відкритої за допомогою досліду властивості.

За допомогою простого досліду формується і наочне уявлення про переміщення як про відображення площини на себе, що зберігає віддаль між точками. На аркуш паперу кладуть тонку прозору пластинку з багатьма отворами. За допомогою олівця відмічають на аркуші положення одного отвору (однієї точки). Нехай це точка A площини. Потім переміщують довільно пластинку на аркуші і через той самий отвір відмічають нову точку A_1. При цьому відмічається, що так можна обійтися з кожною точкою площини. Потім відмічають гострим кінцем олівця через два отвори пластинки точки B і C площини і після деякого переміщення пластинки через тіж отвори відмічають нові точки B_1 і C_1 відповідно. Через те що при переміщенні пластинка не розтягується і не стискується, то віддаль між точками зберігається, тобто $BC = B_1C_1$.

Таким чином, кожна точка X нерухомого аркуша відображається в одну точку X_1 цього ж аркуша. Так одержуємо відображення площини на себе, при якому віддаль між будь-якими двома точками дорівнює віддалі між їх образами.

За допомогою описаного досліду розкриваються і найважливіші властивості руху: а) якщо три точки A, M, B лежать на одній прямій, то їх образи A_1, M_1, B_1 теж лежать на одній прямій; б) якщо точка M лежить між точками A і B, то й M_1 лежить між точками A_1 і B_1.

Відкриті за допомогою досліду ці властивості, звичайно, підлягають доведенню. Тут знову дослід виступає як евристичний метод.

Розглянемо приклад застосування досліду для відкриття алгебраїчної закономірності.

Припустимо, що в синьому мішечку є m синіх паличок, а в червоному — n червоних паличок. Треба звільнити один мішечок. Зробити це можна двома способами. Можна пересипати всі червоні палички із червоного мішечка в синій, і тоді в ньому виявиться $m + n$ паличок. Але можна пересипати всі сині палички в червоний мішечок, і тоді в ньому виявиться $n + m$ паличок. Але як в першому, так і в другому випадку ми маємо в мішечку одну й ту саму множину паличок. Значить, $m + n = n + m$.

Зрозуміло, в конкретному досліді m і n позначають певні числа. Тому одержана рівність є лише однією з посилок, за допомогою яких уже іншим методом (індукцією) одержують загальний закон комутативності додавання натуральних чисел: «$m + n = n + m$ для будь-яких натуральних чисел m і n».

Підрахунок двома способами (за рядками і за стовпчиками) одиничних квадратиків, що заповнюють прямокутник, виміри якого виражаються натуральними числами, є дослідом (експериментом), за до-

помогою якого виявляється комутативність множення натуральних чисел.

Слід відмітити, що за допомогою емпіричних методів — спостереження, досліду, вимірювань — виконується лише початковий етап роботи з математичного опису реальних ситуацій. Математичний матеріал (інтуїтивні поняття, гіпотези, сукупності математичних тверджень), який при цьому одержуємо, підлягає наступній обробці вже іншими методами.

§ 3. ПОРІВНЯННЯ І АНАЛОГІЯ

Порівняння і аналогія — логічні прийоми мислення, що використовуються як в наукових дослідженнях, так і в навчанні. За допомогою порівняння виявляється схожість і різниця предметів, що порівнюються, тобто наявність у них спільних і різних властивостей.

Наприклад, порівняння трикутника і чотирикутника розкриває їх спільні властивості: наявність сторін, вершин, кутів, скільки вершин і кутів, стільки ж сторін, а також різне: у трикутника три вершини (сторони), у чотирикутника — чотири. Порівняння паралелограма і трапеції дозволяє встановити їх спільні властивості: обидва вони чотирикутники, обидва мають паралельні сторони, і різне: в одному — дві пари паралельних сторін, в другому — одна. Порівняння звичайних і алгебраїчних дробів виявляє їх схожість: наявність чисельника і знаменника, відсутність значення, коли знаменник перетворюється в нуль, і т. д. і різне: в одному випадку чисельник і знаменник — числа, в другому — алгебраїчні вирази.

Порівняння приводить до правильного висновку, якщо виконуються такі умови: 1) поняття, що порівнюються, однорідні; 2) порівняння здійснюються за такими ознаками, які мають істотне значення.

Ці дві умови виконуються в наведених вище порівняннях: трикутник і чотирикутник — однорідні поняття (многокутники), паралелограм і трапеція — чотирикутники, звичайні і алгебраїчні дроби — вирази. У всіх трьох випадках порівняння здійснено за істотними ознаками (якщо, наприклад, включили б до спільних властивостей паралелограма і трапеції той факт, що обидва вони позначені одними й тими ж буквами $ABCD$, або вважали б різним позначення їх різними буквами, то це було б помилковим підходом до порівняння.)

Порівняння підготовлює підставу для застосування аналогії.

За допомогою аналогії схожість предметів, виявлена внаслідок їх порівняння, розповсюджується на нову властивість (або нові властивості).

Міркування за аналогією має таку загальну схему:

A має властивості a, b, c, d;

B має властивості a, b, c.

Імовірно (можливо) B має і властивість d.

Як бачимо, висновок за аналогією є лише ймовірним (правдоподібним), а не достовірним. Тому аналогія, як правило, не є доказовим міркуванням, тобто міркуванням, яке може бути доведенням. («Як пра-

вило» тому, що є виняток, пов'язаний з особливим видом аналогії, про що йтиметься далі.) Однак у навчанні, як, між іншим, і в науці, аналогія часто корисна тим, що вона сприяє виникненню у нас догадки, тобто являє собою евристичний метод. У навчанні ж математиці не менш важливо, ніж вчити доводити, треба вчити догадуватися, що саме підлягає доведенню і як знайти це доведення.

У наведеному роз'ясненні того, що таке аналогія, використовується поняття «схожість», яке само потребує роз'яснення. Коли говорять, наприклад, про схожість між людьми, між людиною і його зображенням на фотознімку або картині і т. п., інтуїтивно розуміють, що означає схожість. Але чи можна в такому ж розумінні говорити, наприклад, про схожість між множиною учнів класу і множиною $A = \{1, 2, 3, \ldots, 30\}$, або між множиною точок прямої і множиною дійсних чисел, або між множиною об'єктів на деякій дільниці і планом цієї дільниці? Застосування ж аналогії в математичному дослідженні, а тому і в навчанні математики часто характеризується саме тим, що воно грунтується на глибокій, внутрішній «схожості», а по суті, на однаковості структури множин предметів різної природи з відношеннями, які мають зовсім різний смисл, при відсутності будь-якої зовнішньої «схожості» (в звичайному розумінні) між цілими множинами. Ця «структурна схожість», що має точний математичний опис за допомогою поняття **ізоморфізму**, є основою особливого виду аналогії, яка на відміну від звичайної аналогії, приводить до вірогідних висновків.

Наприклад, основою координатного методу є взаємно однозначна відповідність між множиною точок прямої (площини або простору) і множиною дійсних чисел (пар або трійок чисел), яка переводить деякі відношення між точками у відношення між числами (парами або трійками чисел). Ця взаємно однозначна відповідність є ізоморфізм, який дозволяє здійснити однозначний переклад з мови, що описує структуру множини точок прямої (площини або простору), на мову, яка описує структуру множини R (R^2 або R^3), і навпаки.

Встановивши, наприклад, що структури $(T, \langle)$ і $(R, <)$, де T — множина точок прямої, а «$\langle$» — відношення «передує» ізоморфні, ми можемо кожну властивість, виявлену в $(T, \langle)$ за аналогією, заснованою на цьому ізоморфізмі, з достовірністю переводити у відповідну властивість $(R, <)$, і навпаки.

Так, із $A\,(a) \langle B\,(b)$ ми робимо вірогідний висновок: $a < b$. Якщо точка $M\,(m)$ лежить всередині відрізка довжиною 2 см з серединою $A\,(a)$, то відповідні числа (координати цих точок) знаходяться у відповідному відношенні $|m - a| < 1$, і цей висновок теж достовірний.

Можливість застосування аналогії, здавалось би, до зовсім різних об'єктів грунтується на збіжності математичних моделей цих об'єктів або належності цих моделей до одного класу. Розглянемо простий приклад, який доцільно показати учням старших класів.

Нехай дано електричне коло з одним джерелом енергії E, споживачем П і двома контактами (вимикачами) K_1 і K_2. Для кожного з двох вимикачів можливі два положення, які можна позначити будь-якими знаками, наприклад, «0» і «1» (рис. 15). В такому випадку мно-

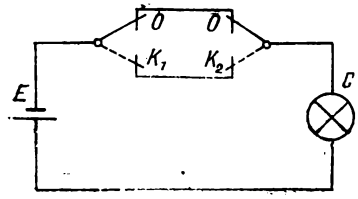


Рис. 15

жині всіх можливих положень пари (K_1, K_2) відповідає множина всіх можливих пар з нулів і одиниць:

$$\{0;\ 1\}^2 = \{(0;\ 0),\ (0;\ 1);\ (1,;\ 0);\ (1;\ 1)\}.$$

Якщо зараз, скориставшись тими самими знаками «0» і «1», позначити стан кола (коли струм не тече — через «0», коли струм тече — через «1»), то неважко побудувати відповідність, яка співставляє кожну з можливих пар положень контактів K_1 і K_2 певний стан кола, яке характеризує дану електричну схему:

$$(0;\ 0) \to 1;\ (0;\ 1) \to 0;\ (1;\ 0) \to 0;\ (1;\ 1) \to 1.$$

Ми одержали функцію f, визначену на множині $\{0;\ 1\}^2$, яка приймає значення із множини $\{0;\ 1\}$, що є областю значень цієї функції ($D(f) = \{0;\ 1\}^2$, $E(f) = \{0;\ 1\}$).

Якщо абстрагуватися від фізичних уявлень, з яких ми виходили, то залишається абстрактний математичний об'єкт f, що являє собою математичну модель фізичного об'єкту — електричного кола, зображеного на рис. 14.

В свою чергу це електричне коло являє собою деяку фізичну інтерпретацію математичного об'єкту — функції f. Але ця функція як абстрактний математичний об'єкт може мати й інші інтерпретації, тобто є математичною моделлю й інших систем, які відрізняються за природою об'єктів і смислом відношень від системи об'єктів, що утворюють електричне коло.

Наприклад, якщо «0» інтерпретувати як хибне висловлення, а «1» — як істинне, то f моделює еквівалентність двох висловлень $K_1 \leftrightarrow K_2$ і, навпаки, ця еквівалентність є логічною інтерпретацією функції f.

Той факт, що електрична схема (рис. 15) і «логічна схема» (еквівалентність двох висловлень) мають одну й ту саму математичну модель — функцію f (описуються однією цією функцією), свідчить про те, що при відсутності всякої зовнішньої схожості ці дві схеми мають глибоку внутрішню схожість, яка дає змогу застосовувати аналогію, переводити властивості однієї схеми у властивості іншої. Наприклад, із хибності або істинності одного висловлення K_1 (або K_2) ще не випливає істинність еквівалентності $K_1 \leftrightarrow K_2$. За аналогією з розімкненості чи замкненості одного контакту K_1 (або K_2) ще не випливає замкненість електричної схеми (рис. 15).

Наведений приклад — один з багатьох, який ілюструє спеціальний вид аналогії, пов'язаний з методом побудови математичних моделей.

Найпростіше диференціальне рівняння

$$y' = -ky \qquad (1)$$

та його розв'язок

$$y = y_0 e^{-kt} \tag{2}$$

можуть описати процес розпаду радія (в цьому випадку формула (2) дає масу y радія в момент x, якщо y_0 — маса радія в момент часу x_0), і процес зміни народонаселення (якщо приріст населення в даний момент пропорціональний кількості населення в цей момент), і процес охолодження тіла при сталій температурі навколишнього середовища (оскільки швидкість охолодження тіла пропорціональна різниці температур тіла і навколишнього середовища), і, взагалі, будь-який процес показникового росту або спаду (при $k < 0$, або $k > 0$), який характеризується тим, що швидкість зміни величини пропорціональна самій величині, що змінюється в даний момент, що й виражено в диференціальному рівнянні (1).

Всі зазначені явища і процеси мають глибоку схожість при всій зовнішній відмінності, яка полягає в тому, що їх математичні моделі належать одному класу моделей (1). Це й дозволяє переносити за аналогією властивості одного з цих процесів на інший, якщо тільки ці властивості можна вивести з побудованої моделі.

Часто та або інша послідовність у вивченні навчального матеріалу обгрунтовується можливістю використання аналогії у навчанні. Наприклад, вивчення десяткових дробів раніше звичайних пояснюється не тільки тим, що саме десяткові дроби широко застосовуються в практиці, але й можливістю використання при вивченні арифметики десяткових дробів аналогії з арифметикою натуральних чисел. При вивченні властивостей алгебраїчних дробів можна використати аналогію з звичайними дробами. Аналогія може бути умовою для одночасного вивчення арифметичної і геометричної прогресій.

Однак в сталій практиці навчання математики аналогія використовується недостатньо. Інколи висловлюються побоювання, що за допомогою аналогії ми можемо прийти до хибних висновків. Наприклад, виходячи з того, що твердження

$$«a \parallel b \text{ і } a \perp c \Rightarrow b \perp c» \tag{1}$$

правильне (є теоремою) і на площині і в просторі, а обернене твердження

$$«a \perp c \text{ і } b \perp c \Rightarrow a \parallel b» \tag{2}$$

правильне на площині (є теоремою планіметрії), за аналогією стверджують, що висловлення (2) правильне і в просторі, і приходять, таким чином, до хибного висновку.

Але треба пам'ятати, що в цьому випадку висновок за аналогією тільки правдоподібний і тому підлягає ще доведенню або запереченню.

Слід відмітити як недолік, що в практиці навчання запереченням ми майже не вчимо. Це є серйозним недоліком у загальноосвітньому і виховному відношенні, через те що в житті нерідко виникає необхідність заперечувати.

Виходячи з істинності твердження (2) на площині, необхідно з'ясувати, чи має місце аналогічна властивість в просторі. Оскільки

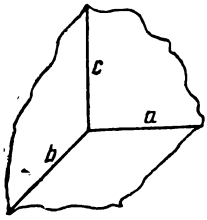


Рис. 16

це твердження є загальним (мають на увазі квантори загальності «для кожних a, b, c»), то для його заперечення достатньо знайти такі прямі a, b, c, щоб умова ($a \perp b$ і $b \perp c$) виконувалась, а висновок ($a \parallel b$) не виконувався (рис. 16).

Ми не повинні боятися виникнення хибних висловлень за аналогією. Необхідно тільки вважати їх за гіпотези (припущення). Помилки, які допускаються в процесі пошуку, дослідження, цілком правомірні, оскільки найчастіше пошук ведеться способом «спроб і помилок». В сталій практиці навчання, як правило, ми не даємо учням помилятися під час відповіді вчителю. В цьому відображається той факт, що навчальна діяльність учнів являє собою в основному тільки репродуктивну (відтворюючу), а в такій діяльності помилки недопустимі. Відтворювати треба безпомилково. В продуктивній, творчій діяльності помилки неминучі. Такими помилками є ті, які з'являються внаслідок застосування аналогії в процесі пошуку. Вони — складова частина методу спроб і помилок. Важливо, щоб учні в пошуку правильних відповідей змогли самостійно знаходити помилковість припущень, які виникають в цьому процесі. Зрозуміло, цьому треба їх учити.

Знаходити схожість, яка б могла бути джерелом плідних міркувань за аналогією, буває не легко навіть в тому випадку, коли природа об'єктів, які порівнюються, однакова.

Візьмемо для прикладу дві геометричні фігури: трикутник і тетраедр. В чому полягає схожість між цими фігурами? Трикутник — плоска фігура, тетраедр — просторова. Може схожість в тому, що грані тетраедра — трикутники? Якщо навіть прийняти, що в цьому є якась схожість (а поки не уточнено, що таке «схожість», можна під цим розуміти що завгодно), то навряд чи може воно бути джерелом для міркувань за аналогією. Глибше дослідження цих двох об'єктів допомагає виявити таку структурну схожість, яка є джерелом аналогії, що веде до відкриття. Дійсно, трикутник і тетраедр — обмежені випуклі множини точок. Перша утворена мінімальною кількістю прямих на площині (немає многокутника з меншою, ніж три, кількістю сторін), друга — мінімальною кількістю площин в просторі. Зрозуміло, з цього не випливає, що всі властивості цих фігур однакові. Але коли ми вже вивчили властивості трикутника і переходимо до вивчення властивостей тетраедра, то встановлена схожість за одними властивостями дає нам право припустити (тільки припустити), що й деякі інші властивості трикутника «переводяться» аналогічним чином у властивості тетраедра. Наприклад, виходячи з встановленої схожості та з того, що «в трикутнику бісектриси кутів перетинаються в одній точці і ця точка — центр вписаного кола», ми приходим до припущення, що «в тетраедрі бісекторні площини двогранних кутів перетинаються в одній точці і ця точка—центр вписаної сфери» і т. д. Ми відкриваємо нові властивості тетраедра, міркуючи за аналогією. Ці властивості, зрозуміло, підлягають доведенню.

Розглянемо другий приклад. Паралелепіпед — просторовий аналог паралелограма: в паралелограмі протилежні сторони паралельні, в паралелепіпеді протилежні грані паралельні. Міркуючи за аналогією, можна прийти до гіпотези, що в паралелепіпеді, як і в паралелограмі, діагоналі, перетинаючись, діляться точкою перетину пополам. Але якщо бачити тільки схожість і не помічати відмінності, зокрема, що в паралелограмі всього дві діагоналі, а в паралелепіпеді — чотири, то ми загубимо важливу властивість, що підлягає доведенню, а саме, що всі діагоналі паралелепіпеда перетинаються в одній точці. Як бачимо, застосуванню аналогії повинно передувати порівняння, за допомогою якого виявляється як схожість, так і різниця.

Сфера — просторовий аналог кола. Ці дві фігури означаються як множини точок площини і простору відповідно, що характеризуються однією й тією самою властивістю:

$$\{X \mid OX = r\}$$

— множина всіх точок площини (простору), віддаль яких від даної точки 0 дорівнює заданому числу r.

Це наводить на догадку, що сфера має деякі властивості, аналогічні властивостям кола, наприклад, що властивості взаємного розміщення прямої і кола переводяться у властивості взаємного розміщення площини і сфери: 1) якщо віддаль від центра сфери до площини більше радіуса сфери, то площина і сфера не мають спільних точок; 2) якщо віддаль від центра сфери до площини дорівнює радіусу сфери, то площина і сфера мають одну спільну точку; 3) якщо віддаль від центра сфери до площини менше радіуса сфери, то площина і сфера перетинаються по колу, тобто мають нескінченну множину спільних точок, які лежать на колі. Легко помітити, що лише в третьому випадку виявляється різниця між колом і сферою, яку слід враховувати при формуванні аналогічних властивостей. Властивості дотичної площини теж можна встановити за допомогою аналогії.

§ 4. УЗАГАЛЬНЕННЯ, АБСТРАГУВАННЯ І КОНКРЕТИЗАЦІЯ

Узагальнення і **абстрагування** — два логічних способи, які застосовуються майже завжди разом в процесі пізнання.

Узагальнення — це мисленне виділення, фіксування яких-небудь загальних істотних властивостей, які належать певному класу предметів або відношень. **Абстрагування** — це мисленне відхилення, відокремлення загальних, істотних властивостей, виділених внаслідок узагальнення, від інших неістотних або незагальних властивостей предметів або відношень, які розглядаються, і відкидання (в межах нашого вивчення) останніх.

Коли ми говоримо «неістотні властивості», то маємо на увазі неістотні з математичної точки зору. Один і той самий предмет може вивчатися, наприклад, і в фізиці, і в математиці. Для фізики істотними є одні його властивості (твердість, теплопровідність, електропровід-

ність та інші фізичні властивості), для математики ці властивості неістотні, вона вивчає тільки форму, розміри, розміщення предмета. З наведеного пояснення зрозуміло, що абстрагування не може здійснюватися без узагальнення, без виділення того спільного, що підлягає абстрагуванню.

Узагальнення і абстрагування незмінно застосовуються в процесі формування понять, при переході від уявлень до понять і разом з індукцією як евристичний метод. Під узагальненням розуміють також перехід від одиничного до загального, від менш загального до більш загального.

Під **конкретизацією** розуміють зворотний перехід — від більш загального до менш загального, від загального до одиничного.

Якщо узагальнення використовується при формуванні понять, то конкретизація — при опису конкретних ситуацій за допомогою сформованих раніше понять.

Уточнимо перехід від одиничного до загального, від менш загального до більш загального і зворотний перехід.

Вивчення окремих предметів a, b, c, ... приводить нас до висновку про наявність у них спільної властивості або загальних властивостей, які ми можемо об'єднати в одну — кон'юнкцію цих властивостей S, тобто $S(a)$, $S(b)$, $S(c)$, ..., $S(x)$ означає: «x має властивість S». Відхиленням цих властивостей S від інших властивостей предметів (тобто абстрагуванням), що розглядаються, ми формуємо клас предметів, який характеризується властивістю S:

$$A = \{x \mid S(x)\}.$$

Таким чином ми здійснюємо перехід від одиничного (від окремих предметів) до загального (класу предметів). Дальше вивчення приводить до включення класу A в більш широкий клас B: $A \subset B$. Це і є перехід до більш загального.

Наприклад, формування поняття «квадрат» на ранньому ступені навчання починається показом множини предметів, які відрізняються один від одного формою, розмірами, кольором, матеріалом, із якого вони зроблені. Діти після того, як їм вказують на одну з цих фігур і говорять, що це квадрат, безпомилково відбирають із множини всі ті, які мають таку саму форму, не приймаючи до уваги відмінностей (різниці), що стосуються розмірів, кольору, матеріалу. Тут виділення з множини предметів підмножини виконується за однією ще недостатньо проаналізованою ознакою — за формою. Діти ще не знають властивостей квадрата, вони розпізнають його лише за формою. Таке розпізнавання зустрічається у дітей 4—5 років. Наступна робота з формування поняття квадрата полягає в аналізі цієї форми з метою виявлення її властивостей.

Учням пропонують шляхом спостереження знайти, що є спільного в усіх відібраних фігур, які мають форму квадрата, чим вони відрізняються від інших. Встановлюється, що в усіх квадратів 4 вершини і 4 сторони. Але в деяких фігур, які ми не віднесли до квадратів, теж 4 вершини і 4 сторони. Виявляється, що в квадрата всі сторони рівні і всі кути прямі. Всі відібрані фігури, що мають ці властивості, ми

об'єднуємо в один клас — **квадрати** (перехід від одиничного до загального).

В подальшому навчанні цей клас включається в ширший клас прямокутників (перехід від загального до більш загального). При цьому переході до більш широкого класу відбувається звуження характеристики класу; одна з властивостей, яка характеризує клас квадратів — рівність всіх сторін, опускається.

Так, коли множину властивостей, що характеризує клас предметів A, позначити через $S(A)$ (в традиційній формальній логіці A називається обсягом поняття, а $S(A)$ — змістом поняття), то має місце таке співвідношення:

$$\text{якщо } A \subset B, \text{ то } S(B) \subset S(A).$$

Зворотний перехід від більш загального до менш загального або виділення деякого підкласу A класу B, здійснюється за допомогою деякої властивості, яку мають деякі елементи B, інші ж не мають її. Ті елементи B, що мають цю нову властивість, і утворюють підклас A класу B.

Приєднавши цю нову властивість P до множини властивостей, які характеризують клас B, одержуємо множину властивостей, що характеризують підклас A, тобто $S(B) \cup \{P\} = S(A)$, або $S(B) \subset S(A)$.

В нашому прикладі, якщо до змісту поняття «прямокутник» (до множини властивостей, які характеризують клас прямокутників) добавити нову властивість (рівність всіх сторін), ми одержимо зміст поняття «квадрат»: множина властивостей, що характеризує клас квадратів.

У математиці узагальнення і абстрагування часто поєднані з заміною сталих змінними (в переході від запису окремих фактів до запису загальних закономірностей), а конкретизація — з підстановкою замість змінних їх значень (в зворотному переході).

Розглянемо з точки зору використання узагальнення і абстрагування відкриття закону комутативності додавання, який раніше ми вивчали в іншому аспекті.

Первинним емпіричним матеріалом тут є множини A і B конкретних предметів — олівців і ручок або чорних і червоних паличок, які не перетинаються. За допомогою досліду легко виявляється, що, приєднуючи до множини A множину B або, навпаки, до множини B множину A, одержимо одну й ту саму множину. Добираючи різну кількість елементів цих множин, одержимо ряд конкретних рівностей: $2 + 3 = 3 + 2$; $5 + 7 = 7 + 5$; $4 + 8 = 8 + 4$ і т. п.

Уважно придивляємось до цих рівностей з метою виявлення у них того, що є спільним, і відокремлення його від часткового змісту. Помічаємо: в лівій частині кожної з цих рівностей записана сума двох чисел, в правій — сума цих самих чисел, але записаних в іншому порядку. Якже зберегти тільки це спільне, не приймаючи до уваги конкретних чисел, що входять до цих рівностей?

Якщо просто відкинути ці числа, ми одержимо форму з «порожніми місцями»: «... + ... = ... + ...», яка не відображає виявленої спільної закономірності, оскільки не відмічено, як порожні місця слід

заповнити одними й тими ж за назвою числами. Щоб ліквідувати цей недолік одержаної форми, зображають порожні місця, які треба заповнити іменами одних і тих самих чисел, у вигляді порожніх «віконець» однакової форми. Внаслідок одержимо

$$«\square + \bigcirc = \bigcirc + \square».$$

Потім пояснюється, що в математиці для більшої зручності замість порожніх «віконець» різної форми застосовуються різні букви і тоді одержимо, наприклад,

$$a + b = b + a \text{ або } x + y = y + x.$$

Ці букви, які відіграють роль порожніх місць, і називають **змінними**, а числа, імена яких можна поставити замість цих букв, — їх **значеннями**.

Таким чином, узагальнення і конкретизація привели до відкриття закону комутативності додавання і одночасно до важливого поняття змінної. Завдяки переходу від імен конкретних чисел до числових змінних і здійснюється узагальнення і абстрагування.

Твердження

$$x + y = y + x \text{ для всіх } x,\ y \in \boldsymbol{N};$$

$$x \cdot y = y \cdot x \text{ для всіх } x,\ y \in \boldsymbol{Q};$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \text{ для всіх } \vec{a},\ \vec{b} \in \boldsymbol{V} \text{ і т. п.},$$

які виражають комутативність конкретних операцій, в конкретних множинах, в свою чергу є емпіричним матеріалом, який підлягає дальшому узагальненню і абстрагуванню з метою одержання загального поняття комутативної операції:

$$x * y = y * x \text{ для всіх } x,\ y \in M.$$

Тут узагальнення і абстрагування здійснюються заміною імен операцій $(+,\ \cdot)$ і множин $(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{V})$ змінними для операції $(*)$ та для множини (M). Виконуючи цю заміну, ми перейшли від менш загального до більш загального. Підстановкою ж замість змінних сталих (імен для операції і множини) ми здійснюємо конкретизацію, перехід від більш загального до менш загального, а потім, відкидаючи квантори загальності («для будь-яких x, y ...») і виконуючи підстановку сталих замість числових змінних (імен або чисел), ми переходимо від загального до одиничного.

Основою конкретизації є правило виведення

$$\frac{\forall x\, P(x)}{P(a)},$$

яке називають **правилом конкретизації**.

Смисл цього правила інтуїтивно зрозумілий: із того, що властивість P мають всі елементи деякої множини, виходить, що цю властивість має будь-який елемент a цієї множини.

Застосовуючи, наприклад, закон асоціативності додавання

$$\forall x, y, z\,(x + (y + z)) = ((x + y) + z) \qquad (*)$$

для усного обчислення суми $7 + (93 + 15)$, ми застосовуємо (неявно) правило конкретизації: мисленно відкидаємо в записі закону асоціативності квантори загальності, підставляємо замість змінних x, y, z відповідно сталі «7», «93» і «15» і одержуємо рівність $7 + (93 + 15) = (7 + 93) + 15$, яка випливає з (*) за правилом конкретизації.

Отже, за допомогою правила конкретизації ми здійснюємо перехід від загального до одиничного.

Узагальнення, абстрагування і конкретизація знаходять широке застосування в спеціальних методах навчання математики, про що йтиметься далі. Якщо деяка реальна ситуація або зв'язана з нею задача приводить до ще не вивченої математичної моделі, то доводиться займатися дослідженням нового класу моделей. Для здійснення переходу від конкретної моделі до класу моделей такого типу використовується узагальнення і абстрагування. Застосування ж результатів дослідження до конкретної моделі цього класу передбачає використання конкретизації.

Наприклад, нехай якась задача описується за допомогою квадратного рівняння

$$2x^2 - 9x + 2 = 0, \qquad (1)$$

коли учні ще не вміють розв'язувати подібні рівняння. Це є стимулом для вивчення відповідного класу рівнянь (моделей)

$$ax^2 + bx + c = 0. \qquad (2)$$

Перехід від конкретної моделі (1) до класу моделей (2), тобто від одиничного до загального, здійснюється заміною коефіцієнтів, що являють собою імена чисел, на числові змінні.

Після дослідження цього класу моделей (побудова алгоритму для розв'язування будь-якого рівняння цього класу) за допомогою конкретизації (підстановки в формулі коренів замість a, b, c конкретних коефіцієнтів) розв'язуємо вихідне та інші рівняння цього класу.

Процес абстрагування в математиці значно відрізняється від аналогічного процесу в інших науках, через те що способи абстрагування залежать від природи об'єктів, які вивчаються, характеру і цілей їх вивчення. Тому природно, що характеристичні особливості абстрагування в математиці неминуче повинні знаходити деяке відображення і в методах навчання математики.

Найбільш поширені в математиці види абстракцій — узагальнююча абстракція (або абстракція ототожнення), ідеалізація та різні абстракції здійсненності — використовуються і в шкільному навчанні математики. Однак методика формування цих абстракцій не розроблена. Тому ці та інші математичні абстракції викликають серйозні труднощі, з ними й пов'язані помилки, які часто допускають учні.

Основою абстракції ототожнення є відношення еквівалентності. При встановленні відношення еквівалентності в досліджуваній множині об'єктів еквівалентні об'єкти ототожнюються за якою-небудь властивістю, яка абстрагується від інших властивостей цих об'єктів і стає самостійним абстрактним поняттям, що знаходиться на більш високому ступені абстракції, ніж об'єкти, від яких воно було абстраговано.

Так, відношення рівночисельності множин об'єднує в один клас всі скінченні множини, між якими можна встановити взаємно однозначну відповідність (еквівалентні множини). Від множин, які належать одному й тому ж класу еквівалентності, абстрагується їх спільна властивість, що характеризує цей клас. Ця властивість і являє собою самостійне поняття натурального числа, яке виражає чисельність множин (одна й та сама для кожної множини) із даного класу.

Так формувалось поняття натурального числа в історії свого розвитку, так воно формується і в навчанні дошкільнят і молодших школярів.

Не слід думати, що засвоєння дітьми послідовності числівників — один, два, три, ..., дев'ять — є ознакою сформованості в них поняття натурального числа. Формування цього поняття у дітей в якійсь мірі імітує історичний процес формування поняття натурального числа.

Ми повинні надати дітям можливість порівнювати множини різних предметів за їх кількістю, виявляти, що між деякими множинами вдається встановити взаємно однозначну відповідність, між іншими не вдається. Так виникають класи рівночисельних множин, яким приписуються як характеристики певні натуральні числа.

Отже, поняття натурального числа, як і інші поняття, що формуються за допомогою абстракції ототожнення, являють собою абстракцію від абстракції: від предмету ми переходимо до класу еквівалентних в якомусь відношенні предметів, а від цього класу — до властивості, спільної для всіх об'єктів, які йому належать, тобто ці об'єкти ототожнюються за однією властивістю, яка абстрагується від усіх інших властивостей.

Абстрагування в математиці має часто характер багатоступінчатого процесу, результатом якого є абстракції від абстракцій.

Розглянемо ще кілька прикладів.

Відношення співнапрямленності променів (площини чи простору) розбиває множину променів на класи еквівалентності — класи співнапрямлених променів. Всі промені одного класу ототожнюються за властивістю однаковості напрямку — відношенням співнапрямленності. По суті, кожний клас співнапрямлених променів являє собою один напрямок. Але цей напрямок визначається кожним променем (представником) цього класу.

У шкільному навчанні не завжди явно виділяються всі етапи абстрагування. Зокрема, утворення класів еквівалентності, як правило, проходить неявно. Спостерігається властивість в деяких предметів даного виду або відношення між ними, що потім абстрагується від цих предметів і стає самостійним поняттям. Часто, нічого не говорячи про класи еквівалентності, ми відразу ж користуємося представниками цих класів.

Продемонструємо це двома прикладами.

1. Формуючи поняття звичайного дробу, ми виходимо з реальної потреби розділити ціле на декілька рівних частин. Одержимо дроби: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}, \ldots$ та ін.

Потім виявляємо (теж за допомогою досліду), що $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \ldots$, тобто дроби $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, ... означають одне й те саме (дробове) число.

По суті, ми маємо тут класи еквівалентності, які утворюються в множині дробів $\frac{a}{b}$ або в множині пар (a, b), де $a \in Z$, $b \in N$, за допомогою відношення еквівалентності $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$.

Таким чином, $\frac{1}{2} \sim \frac{2}{4}$; $\frac{2}{4} \sim \frac{3}{6}$, але коли ми пишемо $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$; $\frac{2}{4} = \frac{3}{6}$, то маємо на увазі, що рівні (суміщаються) числа, позначені еквівалентними дробами. Ці дроби, що належать одному класу еквівалентності, позначають одне раціональне число. Це число можна ототожнити з класом еквівалентних дробів або з будь-яким дробом (з будь-яким представником) цього класу.

Цілком зрозуміло, що працювати з числами-класами практично неможливо. Тому всі відношення і операції звичайно позначаються через відношення і операції над представниками класів, причому так, що їх результати не залежать від вибору представників. У зв'язку з цим ми маємо можливість вибирати найбільш прості представники класів (нескоротні дроби), з якими зручніше працювати.

Як видно, хоч ми в школі й не говоримо про класи еквівалентності, але підкреслення того факту, що є нескінченна множина дробів, наприклад $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{10}$ ..., які виражають одне й те саме число, по суті, є вказівкою на відповідний клас еквівалентності.

2. Розглянемо множину всяких можливих напрямлених відрізків або пар точок площини чи простору, наприклад пару точок (A, B) можна зобразити у вигляді напрямленого відрізка $\overrightarrow{AB}$ з початком A і кінцем B. Встановимо в цій множині відношення еквівалентності

$$\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{A_1B_1} \underset{\text{озн}}{\leftrightarrow} AB \uparrow\uparrow A_1B_1 \text{ і } AB = A_1B_1,$$

тобто два напрямлених відрізки еквівалентні, якщо відповідні промені співнапрямлені, а довжини цих відрізків рівні. Оскільки це відношення є відношенням еквівалентності, то воно породжує поділ множини всіх напрямлених відрізків на класи еквівалентності.

Тепер можливі два методично різних продовження: а) кожний клас еквівалентності називати вектором (це, по суті, те ж саме, що називати вектором паралельний перенос); б) називати вектором напрямлений відрізок, тобто ототожнювати клас еквівалентності з будь-яким його представником.

Таке ототожнення цілком правомірне, оскільки практично в фізичних та інших застосуваннях векторів ми працюємо не з класами еквівалентних напрямлених відрізків, а з тими чи іншими представниками цих класів, тобто з напрямленими відрізками, які виходять з визначених точок.

Педагогічний підхід, який полягає в заміні класу його представником, спрямований на зниження рівня абстрактності понять (напрямлений відрізок — менш абстрактне поняття, ніж клас таких відрізків).

Поруч з абстракцією ототожнення при побудові математичних моделей дійсності, а значить, і при навчанні математики використовується і такий специфічний прийом абстрагування, як **ідеалізація**.

Під ідеалізацією мають на увазі утворення понять, які наділені не тільки властивостями, абстрагованими від їх реальних прообразів, але й деякими уявлюваними властивостями, яких не мають початкові (висхідні) об'єкти. Це робиться для того, щоб за допомогою вивчення ідеалізованих образів полегшити в кінці кінців вивчення і реальних прообразів.

Роз'яснення цього в процесі навчання на конкретних прикладах має важливе виховне значення, розкриваючи зв'язок абстрагованих, ідеалізованих понять з реальним світом. Воно сприяє також розумінню способу математизації, побудови математичних моделей реальних ситуацій.

Дійсно, ніде в природі не зустрічається «геометрична точка», яка не має розмірів, але спроба побудови геометрії без використання цієї абстракції, неможлива. Також не можна розвивати геометрію без таких ідеалізованих понять, як «пряма лінія», «площина», «куля» і т. д. Всі реальні прообрази кулі мають на своїй поверхні вибоїни і нерівності, а інші дещо відхиляються від «ідеальної» форми кулі, як, наприклад, Земля. Але коли б геометри почали займатися такими вибоїнами, нерівностями і відхиленнями, вони ніколи не змогли б одержати формулу для обчислення об'єму кулі. Тому ми вивчаємо «ідеалізовану» форму кулі, і хоч формула, яку одержуємо, в застосуванні до реальних фігур, лише схожих на кулю, дає деяку похибку, одержана наближена відповідь достатня для практичних потреб. Це слід довести до свідомості учнів.

Особливим видом ідеалізації є абстракція потенціальної здійсненності. Наприклад, при побудові натуральних чисел абстрагуються від того, що неможливо написати чи назвати число, яке має в десятковій системі числення багато цифр, наприклад 10^{1000}. Нам достатньо припустити можливість, як тільки дійшли до деякого числа n, написання і наступного за ним числа $n + 1$. Точно так і при вивченні геометрії: користуючись зображеннями тільки скінченних ланок (відрізків) прямої, ми припускаємо можливість необмеженого продовження їх в обидві сторони або нескінченного поділу відрізка чи інших фігур.

§ 5. ІНДУКЦІЯ

Перехід від частинного до загального, від одиничних фактів, встановлених за допомогою спостереження і експерименту, до узагальнень є закономірністю пізнання. Невід'ємною логічною формою такого переходу є **індукція**, що являє собою метод міркувань від частинного до загального, виведення висновку з частинних посилок (від лат. inductio — наведення).

Використання цього методу міркувань, для того щоб одержати нові знання в навчальному процесі, називають індуктивним методом навчання. Нехай $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ — множина всіх можливих частинних випадків, в кожному з яких деяка властивість C може бути або не бути (має або не має місця). Відомо, припустимо, що в k випадках має місце властивість C, тобто є посилки

$$C(a_1),\ C(a_2),\ \ldots,\ C(a_k).$$

Індуктивні міркування будуються за схемою

$$\frac{C(a_1), C(a_2), \ldots, C(a_k)}{\forall x C(x)} \qquad (1)$$

(в схемі над рискою записано перелік посилок, під рискою — висновок). У випадку, коли A — скінченна множина, що складається з k елементів (всіх можливих частинних випадків —k), тобто наші посилки вичерпують всі можливі частинні випадки, схема (1) являє собою правило виведення, засноване на формулі

$$\forall x C(x) \leftrightarrow \bigwedge_{i=1}^{k} C(a_i),$$

і висновок достовірний (істинний, якщо істинні посилки). У цьому випадку міркування, побудоване за схемою (1), називається **повною індукцією**.

Якщо ж множина A всіх можливих частинних випадків має більше k елементів або ж нескінченність, що особливо часто зустрічається в математиці, тобто коли наші посилки не вичерпують всі можливі частинні випадки, то висновок за схемою (1) не є достовірно істинним висловленням, а тільки ймовірно істинний (правдоподібний) при істинності посилок. Таке міркування, побудоване за схемою (1), називається **неповною індукцією**.

В математиці широко використовується ще один вид індукції — повна математична (або математична) індукція. Математична індукція — спеціальний метод доведення тверджень типу $\forall n \in N\ P(n)$ (або $\forall n \in N\ (n > k \supset P(n))$, тобто тверджень, які виражають деяку властивість P, притаманну всім натуральним числам n, або всім $n > k$, де k — певне натуральне число.

Цей метод хоч і називається індуктивним, за своєю структурою являє собою дедуктивне міркування, що спирається на аксіому математичної індукції:

$$P(1) \wedge \forall x (P(x)) \supset P(x+1)) \supset \forall n P(n),$$

тобто якщо 1 має деяку властивість P і якщо для кожного натурального числа x маємо, «якщо воно має цю властивість, то його має і безпосередньо наступне за ним число $x + 1$», то кожне натуральне число n має властивість P*.

Приймаючи до уваги, що безпосередня перевірка наявності властивості P у кожного натурального числа неможлива через нескінченність

* Якщо 1 замінити на k, а під n розуміти змінну для натуральних чисел, більших k, то одержимо висновок $\forall n > k P(n)$

множини N, роблять так: перевіркою встановлюють наявність цієї властивості в числі 1 і доводять, що з припущення про наявність цієї властивості у довільного числа x випливає його наявність і в безпосередньо наступного за ним числа $x + 1$, тобто встановлюється, що властивість P ніби «передається за спадковістю» від x до $x + 1$. Після цього роблять висновок про істинність твердження, що доводиться, тобто про те, що властивість P мають усі натуральні числа.

Інколи цей висновок обгрунтовується так: через те що доводжуване твердження правильне для 1 і із того, що воно правильне для довільного x, випливає, що воно правильне і для $x + 1$, то воно правильне і для числа 2; через те що воно правильне для 2, то на тій самій основі воно правильне і для $2 + 1$, тобто для 3, і т. д. Отже, воно правильне і для кожного натурального числа. Слова «і т. д.» говорять про незавершеність, а по суті, про незавершеність цього міркування, яке складається з нескінченної кількості кроків.

Роль аксіоми математичної індукції полягає саме в тому, що вона дозволяє замінити нескінченне індуктивне міркування скінченним дедуктивним.

Відмітимо, що метод математичної індукції неодноразово включався в шкільну програму і неодноразово виключався з неї як предмет спеціального вивчення. У кожному випадку його можна пояснювати в зв'язку з розв'язуванням задач.

Повна індукція рідко застосовується в процесі навчання. Прикладом повної індукції може бути міркування, яким слід би закінчити доведення теореми про вимірювання вписаного кута, якщо її доводять окремо для випадку, коли центр кола лежить на стороні кута, всередині або зовні його.

Якщо a_1 — випадок «центр лежить на стороні кута», a_2 — «центр лежить всередині кута» і a_3 — «центр лежить поза кутом», то $\{a_1, a_2, a_3\}$ — множина всіх можливих частинних випадків; якщо $C(a)$ означає «теорема доведена у випадку a», то за допомогою міркування за схемою повної індукції

$$\frac{C(a_1), C(a_2), C(a_3)}{\forall x C(x)}$$

робимо висновок, що теорема доведена для всіх можливих випадків, або що «теорема доведена».

Це міркування, звичайно, опускають в підручниках. Доцільно його явно висловити, щоб навчити цьому методу учнів.

Звичайно, коли говорять «індуктивні методи навчання», то мають на увазі застосування неповної індукції в навчанні. А коли говоримо «індукція», то слід мати на увазі неповну індукцію.

Через недостовірність висновку індукція не може бути методом доведення. Але вона являє собою ефективний евристичний метод, тобто метод відкриття нових істин. В такій якості індукцію слід широко застосовувати в шкільному навчанні в рамках методів, орієнтованих на навчання учнів діяльності, спрямованої на засвоєння нових знань.

Індукція, так як і аналогія, може привести до хибного висновку. Так, обчислюючи значення виразу $n^2 + n + 17$ при $n = 1, 2, 3, \ldots$,

..., 15, ми кожного разу одержуємо прості числа, і це наводить на думку, що значення цього виразу при будь-якому натуральному n є просте число. Інакше, на основі п'ятнадцяти частинних посилок одержано загальний висновок, який відноситься до нескінченної множини частинних випадків, і цей висновок виявляється хибним, через те що вже при $n = 16$ одержуємо складне число $16^2 + 16 + 17 = 16 \cdot 17 + 17 = 17^2$.

В історії математики були випадки, коли видатні математики помилялися в своїх індуктивних висновках. Наприклад, П. Ферма припустив, що всі числа виду $2^{2^n} + 1$ прості, виходячи з того, що при $n = 1, 2, 3, 4$ вони є такими, але Л. Ейлер знайшов, що вже при $n = 5$ число $2^{32} + 1$ не є простим (воно ділиться на 641).

Однак можливість одержати за допомогою індукції хибне висловлення не є підставою для заперечення ролі індукції в шкільному навчанні математики. По-перше, застосування індукції в навчанні коректується і спрямовується учителем на відкриття істин. По-друге, треба домагатися розуміння учнями правдоподібного характеру індуктивного висновку. Тому, застосовуючи індукцію, необхідно всякими способами підкреслювати, що висновок є лише припущенням, гіпотезою, що може бути доведено, коли воно істинне, або відкинуте, коли воно хибне.

Наприклад, коли учні відкривають властивість суми кутів трикутника за допомогою вимірювань, необхідно роз'яснити їм, що ми можемо висловити лише припущення (гіпотезу) про те, що «в кожному трикутнику сума кутів дорівнює 180°». По-перше, результати досліду близькі до 180°; по-друге, навіть припускаючи, що всі відхилення в один або в другий бік викликані неминучими похибками вимірювань і для кожного з 30 трикутників, в яких ми виконували вимірювання кутів, сума кутів дійсно дорівнює 180°, ми не можемо на цій основі прийти до висновку, що вона дорівнює 180° для кожного трикутника.

За допомогою таких роз'яснень ми й добиваємося розуміння учнями правдоподібного характеру індуктивного висновку.

Треба відрізняти можливість хибного висновку від помилкового застосування індукції. В практиці інколи зустрічаються помилкові застосування індукції, коли учням не подають необхідну різноманітність частинних посилок. Ось приклад. Учитель хотів підвести учнів до відкриття індуктивним шляхом правила множення десяткових дробів, але за браком часу запропонував тільки один приклад, в якому множене і множник разом мали три десяткових знаки. Після пояснення способу множення на цьому конкретному прикладі вчитель поставив перед класом запитання: «Яке ж правило ми знайшли для множення десяткових дробів?» Учень відрубав «правило»: «Щоб перемножити десяткові дроби, ми множимо їх як цілі числа, не звертаючи уваги на коми, а в добутку відокремлюємо три десяткових знаки». Ось до якого відкриття можна привести учнів, коли будувати індукцію на основі однієї частинної посилки! Зрозуміло, що хто-небудь з учнів, можливо, здогадався, як правильно сформулювати загальне правило, але наша мета — створення такої педагогічної ситуації, в якій всі або, в край-

ньому разі, більшість учнів догадаються, як це зробити, а для цього треба правильно підібрати послідовність частинних посилок.

Цілком зрозуміло, що на питання, скільки треба розглянути частинних посилок і які, щоб підвести учнів до відкриття загальної закономірності, не можна дати відповідь, придатну для всіх випадків застосування індукції і для всіх учнів. Ми повинні турбуватися, щоб частинний зміст, який відбито в посилках і не повинен входити до загального висновку, варіювався, тобто видозмінювався від посилки до посилки, щоб полегшити учням виявити те спільне, незмінне, яке міститься у всіх посилках, що й повинно становити зміст висновку. В наведеному прикладі частинний зміст, який повинен варіюватися в посилках, це число десяткових знаків у множеному і множнику.

На окремих етапах навчання, зокрема в V—VI класах, навчання математики здійснюється переважно індуктивними методами. Тут індуктивні висновки досить переконливі психологічно і здебільшого залишаються поки що (на цьому етапі навчання) недоведеними. Можна виявити тільки ізольовані «дедуктивні острівця», які полягають у застосуванні нескладних дедуктивних міркувань як доведення окремих тверджень.

У подальшому навчанні індукція віддає пальму першості дедукції. Однак вона не виключається, змінюється лише її роль. Якщо в V—VI класах вона служить основним методом навчання, надалі вона стає допоміжним. За допомогою індукції (або аналогії) ми відкриваємо те, що підлягає доведенню дедуктивним способом.

Поєднання індукції з дедукцією в процесі навчання математики цілком правомірне. Коли говорять «математика — дедуктивна наука», то термін «математика» сприймається тут в розумінні готова, вже побудована теорія, або сукупність таких теорій. Коли ж мова йде про методи навчання математики, то тут, як ми вже пояснювали в § 1, мають на увазі залучення самих учнів до діяльності, спрямованої на побудову системи математичних знань, зрозуміло, в тій мірі, в якій це їм доступно під керівництвом учителя.

В процесі ж побудови системи математичних знань поруч з дедукцією застосовуються й інші методи (спостереження, дослід, індукція, аналогія та інш.), основою яких є правдоподібні (вірогідні) міркування.

Наведемо приклад. Ознака перпендикулярності прямої і площини — відома теорема стереометрії. Можна повідомити учням формулювання теореми, подати її доведення. Такий підхід малоефективний.

Можна зробити інакше. Означення перпендикулярності прямої до площини неефективне: ми не можемо перевірити перпендикулярності даної прямої до будь-якої прямої площини, таких прямих нескінченно багато. Виникає задача: чи не можна вказати деяку достатню умову перпендикулярності прямої до будь-якої прямої площини?

Виникає гіпотеза: перпендикулярність до однієї прямої площини. Але вона швидко відкидається, можна побудувати модель прямої, перпендикулярної до однієї прямої площини, але не перпендикулярної до другої.

Виникає друга гіпотеза: перпендикулярність до двох прямих площин. Це вже більш правдоподібно (поки що учні беруть дві прямі площини, які перетинаються між собою). Однак і тут виявляється суперечний випадок: якщо взяти паралельні прямі площини, можна вказати пряму, перпендикулярну до них, але не перпендикулярну до деякої третьої прямої площини. Накінець, формулюється уточнена гіпотеза: якщо пряма перпендикулярна до двох прямих площини, що перетинаються між собою, то вона перпендикулярна до будь-якої прямої цієї площини, тобто і до самої площини.

В такий спосіб ми відкриваємо те, що підлягає дедуктивному доведенню.

Наведений приклад відноситься до курсу X класу. Він стверджує те, що й на цьому ступені навчання індуктивні методи не втрачають свого значення.

§ 6. ДЕДУКЦІЯ

Дедукція (від лат. deductio — виведення) в широкому розумінні являє собою форму мислення, яка полягає в тому, що нове твердження, а точніше, висловлена в ньому думка **виводиться** суто логічним способом, тобто за певними правилами логічного виведення (слідування) з деяких відомих тверджень (думок).

Вперше теорія дедукції (логічного виведення) була розроблена Арістотелем. Ця теорія розвивалась, удосконалювалась з розвитком науки логіки. Особливий розвиток з урахуванням потреб математики вона одержала у вигляді **теорії доведення** в математичній логіці.

Дедуктивне міркування (умовивід) відрізняється від індуктивного, або міркування за аналогією достовірністю висновку, тобто в дедуктивному міркуванні висновок істинний, по крайній мірі, коли істинні всі посилки. На відмінність від індукції (неповної) і аналогії в дедуктивному міркуванні не можна одержати хибний висновок із істинних посилок. Саме тому дедуктивні міркування використовуються в математичних доведеннях (доведеннях математичних тверджень). Широке застосування дедукції в математиці зумовлено аксіоматичним методом побудови математичних теорій.

Аксіоматичний метод, по суті, являє собою своєрідний метод встановлення істинності тверджень математичної теорії, суть якої полягає в тому, що деякі твердження, що виражають основні властивості первинних понять або відношень між ними, приймаються за істинні. Це вихідні твердження, або **аксіоми** теорії. Істинність останніх тверджень, теорем цієї теорії, встановлюється за допомогою дедуктивних доведень, тобто всі останні твердження теорії логічно виводяться (дедукуються) з попередніх тверджень: аксіом, означень і раніше доведених теорем. Ось чому математику і називають «дедуктивною» наукою — в ній все виводиться, «дедукується» з деяких первинних (вихідних) фактів, які висловлені в аксіомах.

Дедукція як метод навчання математики включає: 1) навчання дедуктивним доведенням; 2) навчання розширенню дедуктивної системи включенням до неї нових тверджень, тобто перетворенню сукуп-

ності тверджень, одержаних за допомогою досліду, або індукції, аналогії або інших евристичних методів, в систему тверджень, впорядкованих відношенням слідування, яка розширює вже вивчений фрагмент теорії.

Розглянемо два аспекти дедукції як методу навчання.

1. Під навчанням доведенню ми розуміємо навчання розумовим процесам пошуку і побудови доведення, а не відтворенню і заучуванню готових тверджень. В такому розумінні це педагогічне завдання першорядного загальноосвітнього і виховного значення, яке виходить за межі математичної освіти. Учити доводити означає перш за все вчити міркувати, а це одне з головних завдань навчання взагалі. Що ж стосується значимості цього завдання для засвоєння математичних знань, то воно сумірне значимості доведення в самій математиці.

Пошук доведень здійснюється засобами, відмінними від дедуктивних, і питання про навчання пошуку доведення буде темою наступного параграфу.

Навчання пошуку і побудові доведень спрямовується трьома основними питаннями: «Що?», «Звідки?», «Як?».

Що? — що доводиться? Яке «доводжуване» твердження? Чи все зрозуміло в цьому формулюванні? Чи не можна інакше сформулювати доводжуване твердження? Що «дано»? Що треба довести?

Це неповний перелік питань, які ми об'єднуємо в одному питанні «Що?» Вони зв'язані з вивченням доводжуваного твердження, з можливим зведенням його до більш зручного вигляду для з'ясування умов і висновку. Наприклад, представлення доводжуваних тверджень у вигляді імплікацій з використанням сполучника «якщо...., то» полегшує учням встановити що «дано» (твердження, записане між словами «якщо» і «то»), і «що треба довести» (твердження, записане після слова «то»). Наприклад, розчленування теореми «вертикальні кути рівні» на умову і висновок завжди викликає труднощі в учнів, але ці труднощі відразу зникають, якщо сформулювати теорему у вигляді імплікації: «Якщо кути вертикальні, то вони рівні». Аналогічно теорему «Діагоналі ромба взаємно перпендикулярні» можна подати в формі «Якщо паралелограм — ромб, то його діагоналі взаємно перпендикулярні», в якій легко визначити умову і висновок.

Необхідно з'ясувати **всі** умови теореми. Так, ми не зможемо довести, що середнє арифметичне двох чисел більше їх середнього геометричного, якщо не приймемо до уваги, що це правильно тільки для двох додатніх і нерівних між собою чисел. Це підкреслюється в наступному запису цієї теореми у вигляді імплікації:

$$a>0,\ b>0,\ a\neq b\Rightarrow\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}.$$

Звідки? — звідки, з яких посилок **випливає** (може випливати) доводжуване твердження? З яких вже відомих істинних тверджень даної галузі (аксіом, означень, раніше доведених теорем) можна було б «вивести» це твердження?

Відповідь на це питання вимагає концентрації уваги на змісті умов і висновку доводжуваного твердження з метою виділення тих уже

відомих тверджень, які чимось зв'язані з цими умовами. Сукупність цих тверджень становить базу для пошуку доведення. Ці сукупності можуть бути різними, вказуючи на різні напрямки пошуку, які приводять до різних доведень однієї й тієї ж теореми. Наприклад, готовлячись до доведення теореми про три перпендикуляри, ми можемо виділити (пригадати) сукупність відомих тверджень, зв'язаних з перпендикулярністю прямої і площини (означення, ознака), але ми можемо так думати і про твердження, пов'язані з перпендикулярністю векторів. Унаслідок ми одержуємо два напрямки пошуку і два різних доведення теореми про три перпендикуляри.

Як? — як одержується (виводиться) доводжуване твердження із раніше відомих тверджень (аксіом, означень, теорем)?

Це питання знаходить в масовій практиці навчання просту відповідь: «за допомогою міркування». Так роз'яснюється поняття доведення в теперішніх діючих і пробних навчальних посібниках з геометрії для VII—XI класів школи. Цим роз'ясненням інтуїтивне поняття доведення зводиться до другого інтуїтивного поняття міркування, яке, очевидно, вважається більш зрозумілим. Однак навряд чи слово «міркування» означає для учнів значно більше, ніж слово «доведення», не кажучи вже про те, що не кожне міркування може бути доведенням (має доказову силу).

Можна передбачати (і деякі експерименти стверджують), що в питанні про те, **як ми міркуємо**, можна піднятися в шкільному навчанні (в крайньому разі, в школах з поглибленим вивченням математики або на факультативних заняттях) на більш високий рівень, можна досягти деякого прогресу в розумінні того, що таке доведення, в уточненні цього поняття.

Виділимо в навчанні доведенню два основних рівня. На першому рівні (V—VIII класи) використовувані в доведеннях (неявно) логічні засоби доведення не виявляються, не роз'яснюються, основна увага приділяється з'ясуванню того, «що доводиться» та «з чого це випливає», але не «як це випливає». На цьому рівні доведення розглядається взагалі як міркування, за допомогою якого істинність одного (доводжуваного) твердження встановлюється на основі істинності інших тверджень.

На другому рівні (в старших класах, на факультативних заняттях або в школах з поглибленим вивченням математики) учням можна роз'яснити найпростіші правила виведення і на цій основі уточнити поняття доведення. Це уточнення досягається за допомогою представлення доведення в певній, стандартній формі, яка піддається точному опису. На цьому рівні учням стає доступним аналіз доведення, виявлення його логічної структури, використовуваних в ньому правил виведення, запис змістовного доведення в повній логічній формі, тобто його формалізація.

Методика навчання цьому розглядається в розділі III («Математичні поняття, висловлення і доведення»).

Зрозуміло, в практиці навчання завжди застосовувалися і будуть застосовуватися доведення, подані у вигляді звичайних міркувань, і рівень строгості яких адекватний можливостям учнів. Цей рівень

повинен природно підвищуватися від класу до наступного у відповідності з розвитком цих можливостей, а не навпаки, як це спостерігається в деяких навчальних посібниках, у яких рівень строгості доведень у VII класі вищий, ніж у X.

У практиці навчання вчитель, як правило, сам доводить у класі кожну теорему, а то й двічі або навіть тричі повторює її. Такий метод орієнтовано головним чином на запам'ятовування учнями доведень певних теорем, і навряд чи можна таким методом навчити учнів доводити. Поєднуючи ці методи з методами навчання пошуку доведення, ми навчимо їх доводити. Сам же пошук доведення, як і будь-який пошук, вимагає творчого мислення і розвиває його. Тому метод навчання пошуку доведення підвищує ефективність інтелектуального розвитку учнів, розвитку їх творчого мислення.

В процесі навчання за допомогою досліду або евристичних методів відкриваємо, що при умові A має місце деяка властивість B. У такому випадку треба довести теорему, що має вигляд імплікації $A \to B$, де A — умова, B — висновок теореми.

Після доведення теореми $A \to B$ вивчений фрагмент теорії, наприклад геометрії, розширюється, включаючи і це твердження, яке потім можна використовувати як одну з посилок при доведенні інших, нових теорем.

Проте розширення фрагменту теорії одним твердженням, характерне для існуючої (сталої) методики навчання, не є найраціональнішим способом просування в теорію, розширення знань застосуванням дедукції як методу навчання. По-перше, цей спосіб не відображає специфіки методу дедукції в самій математиці. При описові реальних ситуацій, як правило, одержують не одне твердження, а сукупність тверджень, які потім досліджуються з метою логічного впорядкування, перетворення в «маленьку» теорію, яку приєднують до вже вивченого (побудованого) фрагменту «великої» теорії. По-друге, звичайне використання дедукції в навчанні нераціональне, малоефективне і з дидактичної точки зору. Теза, яка висувається в методичній літературі про навчання «укрупненими блоками» стосовно дедуктивно побудованого фрагменту навчального матеріалу, по суті, означає просування в теорію не поодинокими твердженнями, а маленькими теоріями, які описують певні ситуації, фігури і т. п.

Маємо таку загальну схему. Нехай при описові деякої реальної ситуації за допомогою досліду або іншими евристичними методами одержано множину тверджень

$$M = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}, \text{ де } n > 1.$$

Виникає проблема з'ясування логічних зв'язків між твердженнями з M, а точніше, з якої підмножини A ($A \subset M$) тверджень можна вивести всі останні, звичайно, з використанням наявних знань (Г). Іншими словами, дослідження цієї проблеми повинно мати як результат побудову маленької теорії, яку приєднують до теорії Г. Це означає вибір такої системи A тверджень (посилок, локальних аксіом), щоб слідування

$$\Gamma, A \Rightarrow p_i$$

мали місце для кожного i ($1 \leqslant i \leqslant n$).

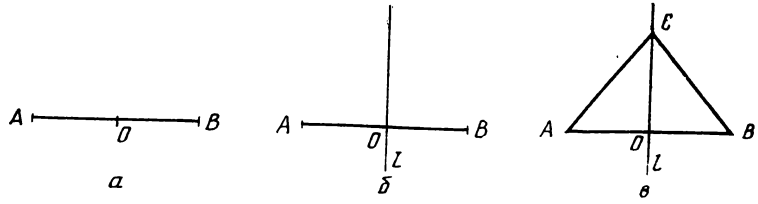


Рис. 17

Подаємо конкретний приклад застосування цієї схеми в навчанні. Розглянемо декілька геометричних ситуацій, які зображено на рис. 17, і попробуємо дати їм математичний опис, тобто описати за допомогою математичних речень те, що ми бачимо на кожній з позицій на рисунку. При цьому будемо користуватися спостереженням, дослідом (наприклад, можна перекопіювати на аркуш прозорого паперу, перегнути його певним чином), вимірюванням:

А. Те, що зображено на рис. 17, *а*, можна описати так. Ми бачимо, що точка O лежить на відрізку AB, тобто

$$p_1\colon\ O \in AB;$$

що вона — середина відрізка (можна підкріпити це твердження вимірюванням):

$$p_2\colon\ AO = OB;$$

використовуючи наші знання про центральну симетрію, можна теж стверджувати, що

$$p_3\colon\ Z_0(A) = B;$$
$$p_4\colon\ Z_0(AB) = BA.$$

Таким чином, ми одержали множину з чотирьох тверджень

$$M = \{p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4\}.$$

Виникає питання: чи потрібно запам'ятати всі ці чотири твердження, щоб знати все про фігуру, яка зображена на рис. 17, *а*?

Вияснимо, що з цього випливає в множині M. Із p_1 не випливає p_2, оскільки точка O може належати відрізку AB, але не бути його серединою.

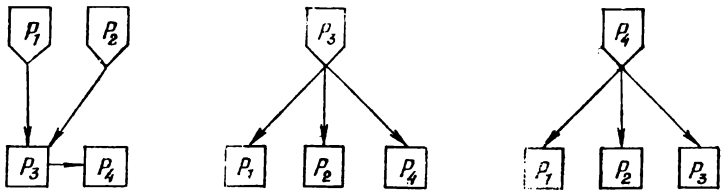
Із p_2 не випливає p_1, через те що точка O може бути рівновіддаленою від кінців відрізка AB, але не належати цьому відрізку.

Із p_1 і p_2 випливає p_3 (за означенням центральної симетрії), а з p_3 випливає p_4 (з того ж означення).

Відношення слідування породжує в цьому випадку, якщо за первинні взяти твердження p_1 і p_2, в множині M структуру, зображену на рис. 18, *а*.

Але можна прийняти одне твердження p_3 як первинне (вихідне). З нього випливають всі останні (рис. 18, *б*). Як первинне можна також прийняти твердження p_4 (рис. 18, *в*).

У цьому простому випадку чотирьох тверджень легко знайти всі можливі способи логічного впорядкування за допомогою відношення слідування (перетворення множини M в маленьку теорію).



а *б* *в*

Рис. 18

Б. Для опису ситуації, що зображена на рис. 17, *б*, ми доповнимо множину M такими твердженнями:

$$p_5\colon\ O \in l;$$
$$p_6\colon\ AB \cap l = 0;$$
$$p_7\colon\ l \perp AB;$$
$$p_8\colon\ S_l(A) = B;$$
$$p_9\colon\ S_l(AB) = BA.$$

Ми одержали нову, розширену множину тверджень

$$M_1 = \{p_1, p_2, \ldots p_9\} \text{ таку, що } M \subset M_1.$$

Тут вже маємо можливість значно більшого числа різних систем первинних тверджень, кожна з яких має серед своїх висновків всі твердження з M_1.

Наприклад, достатньо в кожному з трьох варіантів системи вихідних тверджень для множини M приєднати до вихідних тверджень p_8, або p_9, або p_5 і p_7, або p_6 і p_7 і ми вже одержимо 12 різних систем.

Якщо, наприклад, приєднати до варіанту *б* на рис. 18 як вихідне твердження p_8, одержимо дедуктивну структуру, що зображена на рис. 19.

В. Неважко помітити, що фігура, зображена на рис. 17, *в*, включає в себе фігуру, що зображена на рис. 17, *б*, але має і деякі інші елементи:

точку C, що лежить на прямій l,

$$p_{10}\colon\ C \in l;$$

відрізки CA і CB, які, очевидно, рівні,

$$p_{11}\colon\ CA = CB;$$

вони ж симетричні відносно l

$$p_{12}\colon\ S_l\ (CA) = CB.$$

Виникає також припущення, що й кути CAB і CBA рівні:

$$p_{13}\colon \angle CAB = \angle CBA.$$

І що l — бісектриса кута C: і сам трикутник ABC симетричний відносно l, тобто

$$p_{14}\colon\ \angle ACO = \angle BCO,$$
$$p_{15}\colon\ S_l(\triangle CAB) = \triangle CBA.$$

Ми одержали тепер множину тверджень

$$M_2 = \{p_1, p_2, \ldots, p_{15}\}, \text{ причому } M_1 \subset M_2.$$

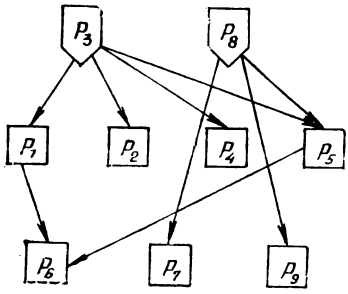


Рис. 19

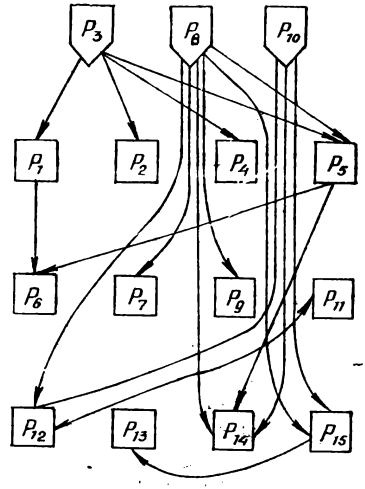


Рис. 20

Виникає задача, аналогічна тій, яку розв'язали для M_1: знайти таку систему первинних тверджень, серед наслідків яких були б всі твердження з M_2.

Візьмемо, наприклад, систему $A_1 = \{p_3, p_8\}$ первинних тверджень для M_1 і приєднаємо до неї твердження p_{10}. Іншими словами, приймемо систему первинних тверджень $A_2 = \{p_3, p_8, p_{10}\}$. Оскільки з A_1 випливають всі твердження з M_1, то залишається довести, що з A_2 випливає кожне з тверджень p_{11}—p_{15}.

Неважко помітити, що

$$p_8,\ p_{10} \Rightarrow p_{12};$$
$$p_8,\ p_{10} \Rightarrow p_{15};$$
$$p_{12} \Rightarrow p_{11},$$

через те що всі симетричні фігури рівні:

$$p_{15} \Rightarrow S_l(\angle CAB) = \angle CBA;$$
$$S_l(\angle CAB) = \angle CBA \Rightarrow p_{13};$$
$$p_5,\ p_8,\ p_{10} \Rightarrow S_l(\angle ACO) = \angle CBO;$$
$$S_l(\angle ACO) = \angle BCO \Rightarrow p_{14}.$$

Кожний з перелічених наслідків являє собою задачу на доведення.

Отже, множину $A_2 = \{p_3, p_8, p_{10}\}$ можна використати як систему тверджень (посилок) для доведення всіх останніх тверджень з M_2. Така дедуктивна структура, породжена вибором первинних тверджень A_2 і відношенням слідування, зображена на рис. 20.

Якщо проаналізувати доведення тверджень p_{11} — p_{15}, які ми описали, то неважко виявити, що в них використовуються, крім первинних тверджень із A_2, вже раніше вивчені факти, наприклад означення і властивості осьової симетрії, центральної симетрії, рівності фігур.

Як бачимо, ми побудували маленьку теорію, яка описує фігуру, зображену на рис. 17, *в* (рівнобедрений трикутник), в межах «великої» геометричної теорії, частину якої (деякі аксіоми, означення і теореми) ми вже знали і використовували.

Для множини тверджень M_2, так само, як і для M_1 або M, можна, зрозуміло, вибрати різні системи вихідних тверджень. Поруч з A_2 можна вибрати, наприклад, $A_3 = \{p_3, p_5, p_{12}\}$ або $A_4 = \{p_3, p_6, p_7, p_{10}\}$, $A_5 = \{p_3, p_8, p_{11}\}$, $A_6 = \{p_{15}\}$ і ін.

Важливо зауважити, що кожна система визначає варіант «теорії рівнобедреного трикутника» і відповідний варіант означення: трикутник рівнобедрений, якщо

(A_2) дві вершини симетричні відносно прямої, яка проходить через третю вершину, або

(A_3) дві сторони симетричні відносно прямої, на якій лежить медіана, проведена до третьої сторони, або

(A_4) медіана і висота, проведені з однієї вершини, суміщаються, або

(A_5) дві сторони рівні, або

(A_6) є вісь симетрії і ін.

Всі ці означення з логічної точки зору рівносильні (еквівалентні), через те що вони визначають один і той же клас фігур. Звичайно в шкільних підручниках вибирається означення, яке відповідає A_5. Цей вибір уже зв'язаний не з логічними, а з дидактичними міркуваннями (рівність двох сторін — наочна властивість, тому вона й приймається за визначуване, первинне для побудови теорії).

Ілюстрована наведеним прикладом узагальнююча схема (1) застосування дедукції в навчанні математики, як і будь-який інший метод навчання, не є універсальною.

Вибір теми, навчального матеріалу, для вивчення якого доцільно застосувати той чи інший метод навчання, являє собою складну педагогічну проблему, для розв'язання якої потрібний глибокий аналіз матеріалу, що підлягає вивченню.

§ 7. АНАЛІЗ І СИНТЕЗ

Аналіз — логічний прийом, метод дослідження, який полягає в тому, що об'єкт, який вивчається в умі, або практично, розчленовується на складові елементи (ознаки, властивості, відношення), кожний з яких досліджується окремо як частина розчленованого цілого.

Синтез — логічний прийом, за допомогою якого окремі елементи об'єднуються в ціле.

Досить часто вміння мислити пов'язують з умінням аналізувати. Це правильно, оскільки виведення наслідків, що виражають нові властивості об'єкта, що вивчається, досить часто вимагає аналізу того, що вже відомо про нього.

В математиці, частіше всього, під аналізом розуміють міркування (судження) в «зворотному» напрямі, тобто від невідомого, від того, що треба знайти, до відомого, до того, що вже знайдено або дано, від того, що треба довести, до того, що вже доведено або прийняте за істинне.

В такому розумінні, найбільш важливому для навчання, аналіз є засобом пошуку розв'язання, доведення, хоча в більшості випадків сам по собі не є розв'язком, доведенням.

Синтез, спираючись на дані, які одержано в процесі аналізу, дає розв'язання задачі або доведення теореми.

Аналіз є основою досить загального підходу до розв'язування задач (маємо на увазі нестандартні задачі, для яких немає відповідного алгоритму), відомого під назвою зведення (редукції) задачі до сукупності підзадач.

Ідея такого підходу полягає саме у властивому для аналізу «міркуванні в зворотному напрямі» від задачі, яку треба розв'язати, до підзадач, потім від цих підзадач до підпідзадач і т. д., поки вихідна (первинна) задача не буде зведена до набору елементарних задач. Що ж розуміють під «елементарними задачами»? Це, по-перше, задачі, які розв'язуються за один крок пошуку, по-друге, більш складні задачі, тобто, які не розв'язуються за один крок пошуку, розв'язання яких уже відоме з досвіду.

З такого розуміння елементарної задачі випливає, що чим більший досвід розв'язування задач, тим більше задач стає для нас «елементарними» в згаданому вище розумінні, а значить тим менший обсяг пошуку при розв'язуванні нових задач, їх зведення до елементарних, оскільки мета пошуку полягає в одержанні елементарних задач, які й зупиняють процес пошуку.

Розглянемо приклад застосування описаного підходу до розв'язування задачі на доведення: «Якщо через точку поза колом провести січну й дотичну, то добуток січної на її зовнішню частину дорівнює квадратові дотичної».

Позначимо через P умову: AC — дотична, C — точка дотику; AD — січна, AB — її зовнішня частина; через Q — висновок: $AD \cdot AB = AC^2$ (рис. 20). В цих позначеннях задачу можна записати так:

$$\Gamma,\ P \overset{?}{\Rightarrow} Q,$$

де Γ — сукупність вже відомих істинних тверджень геометрії.

Доводжувану рівність одержати безпосередньо з раніше відомого ніби-то не можна. Чи не можна цю рівність дещо перетворити? Її можна подати у вигляді пропорції

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AC}.$$

Значить, $\Gamma,\ P,\ \frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AC} \overset{?}{\Rightarrow} Q$ — елементарна задача. Але тоді випливає нова задача:

$$\Gamma,\ P \overset{?}{\Rightarrow} \frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AC}.$$

Звідки можна одержати пропорціональність відрізків? Очевидно, в подібності трикутників, у яких ці відрізки є відповідними сторонами. Як же треба утворити ці трикутники? Це легко помітити з самої про-

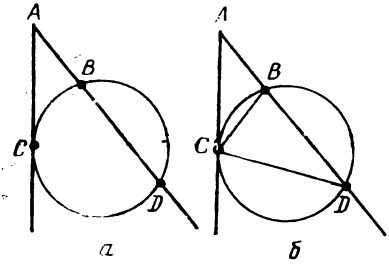


Рис. 21

порції. Якщо члени першого відношення (AC, AD) будемо вважати сторонами одного трикутника, а члени другого відношення (AB, AC) — сторонами другого трикутника, то слід утворити трикутники ACD і ABC, тобто з'єднати точки (C, D) і (B, C) (рис. 21, *б*); до цього ж ми прийдемо, якщо припустимо, що попередні члени відношень — сторони одного трикутника, а наступні — сторони другого.

Отже, Г, P, $\triangle ACD \sim \triangle ABC \overset{?}{\Rightarrow} \frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AC}$ — елементарна задача (пропорціональність відповідних сторін безпосередньо випливає з подібності трикутників), але тоді виникає нова задача:

$$\text{Г, } P \overset{?}{\Rightarrow} \triangle ACD \sim \triangle ABC.$$

Перебираючи (усно) ознаки подібності трикутників і враховуючи, що на пропорціональність сторін ми не можемо спиратися, оскільки це ще не доведено, приходимо до елементарної задачі:

Г, P, $\angle A = \angle A$, $\angle ACB = \angle ADC \overset{?}{\Rightarrow} \triangle ACD \sim \triangle ABC$ (перша ознака подібності трикутників). Але тоді ще випливає дві нові задачі:

$$\text{Г, } P \overset{?}{\Rightarrow} \angle A = \angle A \text{ і Г, } P \overset{?}{\Rightarrow} \angle ACB = \angle ADC,$$

перша з яких тривіальна (кути, що суміщаються, рівні), друга безпосередньо випливає з вимірювання вписаного кута і кута, утвореного дотичною і хордою, і тому її можна вважати елементарною. На цьому закінчується зведення даної задачі до підзадач.

Тепер, йдучи зворотним шляхом, від елементарних задач, до яких ми звели в кінці кінців дану задачу, ми одержимо розв'язання цієї задачі, тобто доведення сформульованого твердження.

Здійснений пошук доведення за допомогою зведення задачі до сукупності підзадач і сам розв'язок, одержаний внаслідок цього пошуку, можна наочно подати у вигляді таких графів: пошуку доведення — аналіз (рис. 22), доведення — синтез (рис. 23).

У наведеному прикладі первинна задача була зведена до однієї сукупності підзадач, завдяки чому був відкритий один спосіб розв'язування (доведення). Однак часто подібний пошук відкриває можливість зведення первинної задачі до альтернативних сукупностей підзадач. Такий процес зведення можна наочно зобразити за допомогою так званого І/АБО-графа.

Зображений на рис. 24 за допомогою такого графа процес зведення задачі A полягає ось в чому: для розв'язування задачі A достатньо розв'язати одну із задач B або C (B і C називаються АБО-вершинами графа чи вершинами типу *АБО*). Для розв'язування задачі B необхідно розв'язати задачі D і E (D і E називаються І-вершинами графа або

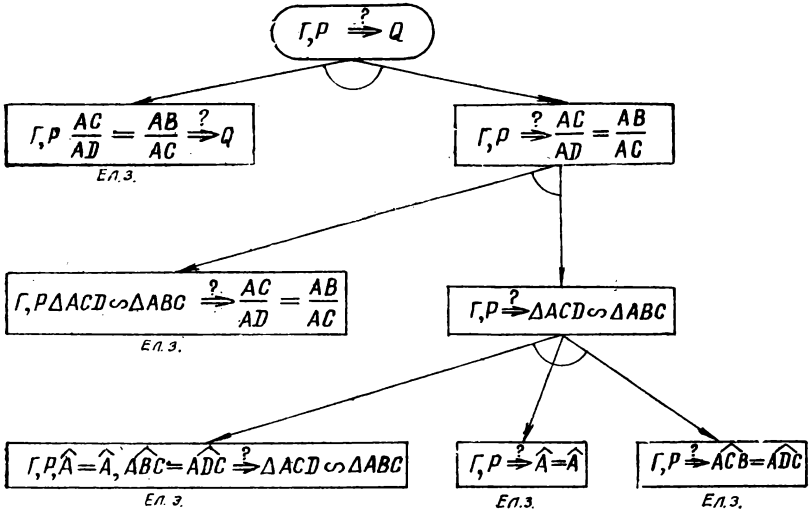


Рис. 22

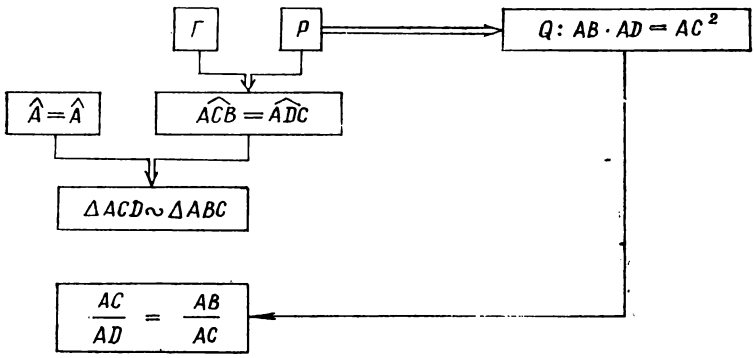


Рис. 23

вершинами типу I). Такого ж типу є вершини F, G, H, K, L (стрілки, що ведуть до I-вершин, з'єднані дугою). Вершини ж M і P є знову АБО-вершинами, для розв'язування ж задачі H достатньо розв'язати одну із задач M або P.

І/АБО-граф виявляється зручною формою для наочного уявлення процесу зведення і може використовуватись в навчанні.

Наведемо приклад.

З а д а ч а. Довести, що середини півдіагоналей паралелограма є вершинами паралелограма.

Позначимо через P сукупність посилок (умова), тобто $P = \{ABCD)$ — паралелограм; $AC \cap BD = O$; $AA_1 = A_1O$; $BB_1 = B_1O$; $CC_1 = C_1O$; $DD_1 = D_1O\}$ (рис. 25).

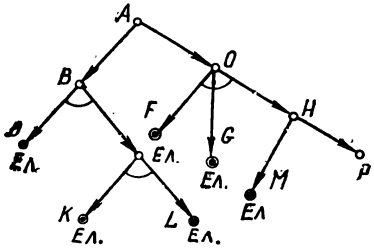


Рис. 24

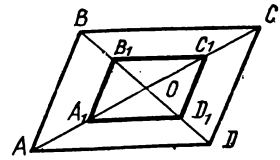


Рис. 25

Перш ніж перейти до пошуку розв'язування зведенням задачі до підзадач, необхідно пригадати вже відомі положення (означення, ознаки, інші раніше доведені теореми, які стосуються паралелограма, трикутника середньої лінії трикутника), пов'язані з об'єктами, що розглядаються в задачі. Ці положення можуть виявитися корисними в процесі зведення даної задачі до підзадач.

Означення і кожна з відомих ознак паралелограма підказує можливий напрям пошуку. Можна вести пошук за всіма цими напрямами, якщо ми хочемо знайти різні способи доведення. Але коли ми шукаємо один, можливо, простіший спосіб, ми ведемо пошук тільки в такому напрямі, який здається перспективнішим, виходячи з тієї евристичної ситуації, яка закладена в умові. Через те що умова зв'язана з діагоналями, то можна припустити, що саме ознака паралелограма, пов'язана з властивостями діагоналей, швидше приводить до мети.

Нижче подаємо фрагменти І/АБО-графа, за допомогою якого пошук доведено до кінця тільки в цьому напрямі, на ньому для скорочення через O позначено висновок («$A_1\ B_1\ C_1\ D_1$ — паралелограм»).

Повний граф (рис. 26) пошуку за всіма напрямами дозволяє порівняти різні способи доведення, виявити найбільш раціональний, пода-

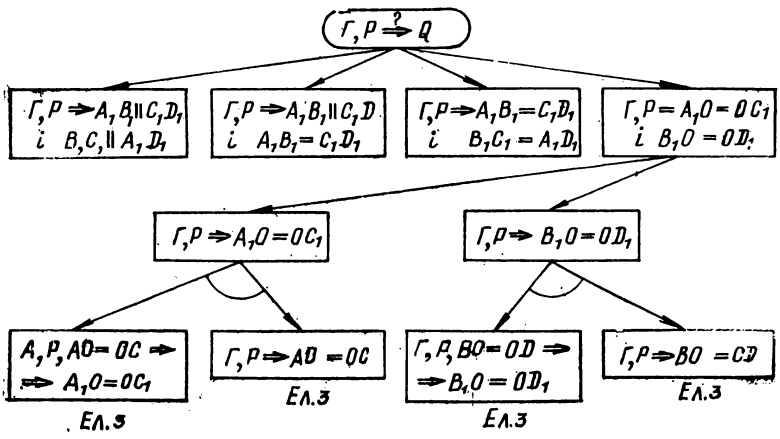


Рис. 26

ний на схемі, і підказує вчителеві, як спрямувати пошук учнів, обравши для цього найкоротший шлях.

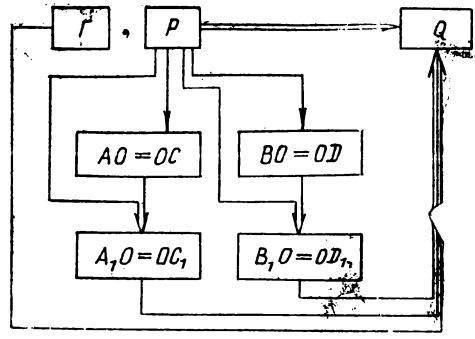


Рис. 27

Як показує цей приклад, в умови задачі можна добути евристичну інформацію, яка сприяє відкриттю перспективного напряму пошуку. Знайдений спосіб доведення можна подати у вигляді слідуючого графа (рис. 27), який наочно зображає синтез цього доведення і пошуку. Останній легко одержати в цього графа, якщо просуватися від елементарних задач до пошуку, тобто до доводжуваного твердження.

Уважно розібравши обидва приклади зведення задачі на доведення до підзадач, можна помітити, що тут застосована одна й та сама схема пошуку доведення. Маючи на увазі, що схема зустрічається досить часто, розглянемо її в загальному вигляді.

Нехай треба довести твердження

«Якщо P, то Q».

Ми вже знаємо, що цю задачу можна подати у вигляді

$$\text{«}\Gamma,\ P \overset{?}{\Rightarrow} Q\text{»},$$

де Г — сукупність вже відомих тверджень теорії, на мові якої сформульовано і доводжуване твердження.

Загальна схема зведення до підзадач такого вигляду полягає в тому, що в первинну задачу вводять нові додаткові посилки так, щоб можна було одержати елементарну задачу, а потім формулюють додаткові задачі на доведення цих нових посилок.

Так, при зведенні задачі (1) може бути добавлена одна нова задача X_1. В цьому випадку одержимо рис. 28.

Якщо задача (2) елементарна, то процес зведення задачі (1) до елементарних задач закінчено. Якщо ж задача (2) не є елементарною, то до неї застосовується така ж процедура пошуку, що й до задачі (1), тобто шукаємо таку посилку X_2, доповнення якої дозволило б нам одержати

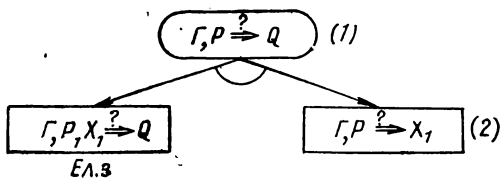


Рис. 28

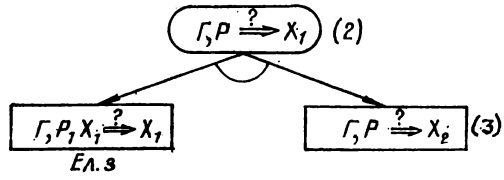


Рис. 29

елементарну задачу і нову задачу на доведення додаткової посилки X_2 (рис. 29).

Якщо задача (3) елементарна, то пошук розв'язування задачі (1) закінчується, вона зведена до елементарних задач. Коли ж ні, то до задачі (3) застосовується така ж процедура пошуку і т. д.

Але що тут означає «і т. д.»? Процес пошуку повинен бути скінченним і складатися не з дуже великої кількості кроків, оскільки їх здійснює людина. Занадто великий обсяг пошуку часто є причиною того, що процес розв'язування не доводиться до кінця.

Взагалі процес пошуку за описаною вище схемою може мати два виходи: або через певну кількість кроків ми одержуємо елементарні задачі (тобто, пошук привів до первинної задачі), або на якомусь кроці ми одержуємо неелементарну задачу, яку не вдається звести до елементарної тим самим шляхом, тобто в наших знаннях ми не знаходимо тієї додаткової посилки, за допомогою якої це можна було б зробити. Виходить, пошук не привів до розв'язання первинної задачі, трапилась невдача, або, як часто говорять, «ми зайшли в тупик». Якщо це трапилось, то необхідно (можливо, після деякої перерви) повернутися до пошуку розв'язування задачі, але вже в іншому напрямі, за допомогою інших «операторів зведення»: Y_1, Y_2, ..., Y_n.

Описана схема пошуку не завжди застосовується в такому вигляді, коли на кожному кроці добавляється тільки одна додаткова посилка. Трапляється, як це було в одному з наведених випадків, що одночасно добавляється декілька додаткових посилок, щоб перетворити нашу задачу в елементарну, і тоді одержують кілька нових задач на доведення цих нових (додаткових) посилок (рис. 30).

Інколи, як це трапилось у другому з наведених прикладів, з самого початку пошуку доведення ми виявляємо декілька можливих напрямів пошуку і проводимо його за всіма цими напрямами, відкриваючи різні способи доведення.

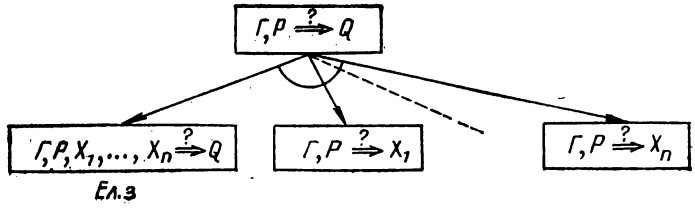


Рис. 30

Описана схема пошуку доведення, природно, не єдино можлива. Вона теж не є універсальною, тобто застосовуваною до будь-якої задачі на доведення, незалежно від структури доводжуваного твердження.

Підхід до розв'язування задач, який полягає у зведенні задач до сукупності підзадач, широко застосовується в практиці розв'язування не тільки задач на доведення.

Для прикладу подаємо арифметичну задачу для V класу: «В двох бригадах радгоспу поля під зернові становили 2000 га і 3000 га відповідно. Перша бригада зібрала по 30 ц, друга по 26 ц з гектара. Продано державі 5500 т з першого поля і 7000 т з другого. Останнє зерно засипано в насінневий фонд. Скільки зерна засипав радгосп в насінневий фонд?

Звичайно, аналіз задачі, по суті, являє собою процес зведення даної задачі до сукупності підзадач, доведений до елементарних задач. Тут елементарною вважається задача, яка розв'язується за допомогою однієї дії над даними задачі (тобто елементарною вважається і задача, розв'язування якої знаходиться серед даних, наприклад: «Скільки зерна продано державі з першої ділянки?»).

Можливий і інший шлях пошуку.

Побудова самого процесу розв'язування (синтез) здійснюється послідовним розв'язуванням підзадач в зворотному порядку, починаючи з елементарних (1—2—3—4—5) (рис. 31).

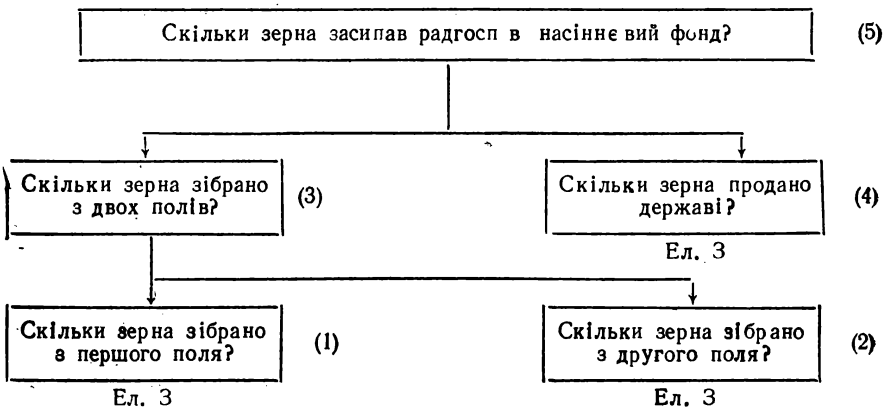


Рис. 31

§ 8. МЕТОДИ ПРОБЛЕМНОГО НАВЧАННЯ

Під проблемним навчанням звичайно розуміють навчання, яке проходить у вигляді розв'язування послідовно створюваних в навчальних цілях **проблемних ситуацій.**

Що ж таке проблемна ситуація? З психологічної точки зору **проблемна ситуація** являє собою більш чи менш явно осмислене утруднення, породжуване невідповідністю, неузгодженістю між тими знаннями,

що є, і тими, які потрібні для розв'язування задачі, яка виникла або запропонована.

Задача, яка створює проблемну ситуацію, і називається **проблемною задачею**, або просто **проблемою**.

Сказане відноситься і до науки, і до навчання, яке названо проблемним і імітуючим в якійсь мірі процес розвитку наукових знань шляхом розв'язування проблемних ситуацій. Часто задача, яка є проблемною при вивченні шкільного курсу математики (навчальною проблемою), колись виникла як наукова проблема.

Психологічною основою проблемного навчання, звичайно, називають сформульовану С. Л. Рубінштейном тезу: «Мислення починається з проблемної ситуації». Усвідомлення характеру утруднення, недостатності запасу знань розкриває шляхи його подолання, яке полягає в пошуку нових знань, нових способів дій, а пошук — компонент процесу творчого мислення. Без такого усвідомлення не виникає потреби в пошуку, а значить, немає і творчого мислення.

Таким чином, не кожне утруднення викликає проблемну ситуацію. Воно повинно породжуватися недостатністю знань, і ця недостатність повинна бути усвідомлена учнями.

Однак і не кожна проблемна ситуація породжує процес мислення. Воно не виникає, зокрема, коли пошук способів розв'язування проблемної ситуації не під силу для учнів на даному етапі навчання в зв'язку з їх непідготовленістю до необхідної діяльності.

Це особливо треба враховувати, щоб не включати в навчальний процес непосильні задачі, які сприяють не розвитку самостійного мислення, а відверненню від нього і послабленню віри в свої сили.

Яку ж задачу можна вважати проблемною для учнів певного класу, які **ознаки** проблеми?

Ознаками проблеми є слідуючі:

1) породження проблемної ситуації в науці або в процесі навчання;

2) відповідна готовність і відповідний інтерес до пошуку того, хто розв'язує;

3) можливість неоднозначного способу розв'язання, яка зумовлює наявність різних напрямів пошуку.

Цілком зрозуміло, що ці ознаки мають прагматичний характер, тобто вони відображають відношення між задачею і тими, кому вона запропонована. Немає смислу ставити питання, наприклад: «Чи є задача «Розв'язати рівняння $x^2 - 5x - 4 = 0$» проблемною?» — безвідносно до того, кому вона запропонована. Питання неозначене, оскільки на нього не можна однозначно відповісти. Якщо задача запропонована учням до того, як вони вивчали теорію квадратних рівнянь і знають формулу коренів, вона для них, без сумніву, проблема, створює в них проблемну ситуацію, через те, що тих знань, які вони мають, для розв'язання цієї задачі недостатньо. Якщо ж ця задача запропонована учням, які володіють відповідним алгоритмом, то, природно, для них вона не є проблемою.

В зв'язку з проблемним навчанням вживають два терміни: «проблема» і «проблемна задача». Інколи їх розуміють як синоніми, частіше

ж як об'єкти, позначувані цими термінами, відрізняють за обсягом. Проблема розпадається на послідовність або розгалуджену сукупність проблемних задач. Таким чином, проблемну задачу можна розглядати як найпростіший, окремий випадок проблеми, що складається з однієї задачі.

Наприклад, можна поставити проблему вивчення трапеції. Одна з проблемних задач, що входить в цю навчальну проблему, полягає у відкритті, а точніше, у перевідкритті властивості середньої лінії трапеції. Можна поставити проблему вивчення деякої нової функції. Одна з проблемних задач, що входить до складу цієї проблеми, полягає в означенні проміжків зростання, спадання цієї функції. Друга задача — встановлення наявності екстремумів і т. д.

В здійсненні проблемного навчання треба починати з проблемних задач, підготовляючи цим самим грунт для постановки навчальних проблем.

Проблемне навчання орієнтовано на формування і розвиток здібності до творчої діяльності і потреби в ній, тобто воно більш інтенсивне, ніж не проблемне, впливає на розвиток творчого мислення учнів. Але щоб ця функція проблемного навчання найкращим чином була реалізована, недостатньо включити в процес навчання випадкову сукупність проблем.

Система проблем повинна **охоплювати основні типи проблем**, які властиві даній галузі знань, хоч, може, і не обмежуються ними. Які ж типи проблем, властиві для математики, можна включити (зрозуміло, на відповідному рівні) в проблемне навчання математики?

Дослідження в математиці охоплюють велику різноманітність типів проблем. Одні з них виникають всередині математики і пов'язані з дальшим розвитком або внутрішньою будовою математичних теорій, інші ж — поза математикою і зв'язані з її застосуванням в різних галузях знань. Часто саме ті нові задачі, які пред'являються математиці зовні, зумовлюють дальший розвиток математичних теорій або створення нових теорій. Ця обставина є найважливішою в процесі відбору основних типів проблем для навчання математики. Ми повинні виходити з реальних ситуацій і задач, які виникають як в самій математиці, так і поза нею, щоб ними мотивувати необхідність дальшого розвитку математичних знань. В останньому випадку подібні дослідження часто починаються з пошуку математичної мови для опису ситуації, яка розглядається, об'єкта, що вивчається, для побудови його математичної моделі. Побудована модель підлягає потім дослідженню за допомогою відповідної теорії, якщо вона вже побудована. Або для цієї мети необхідний дальший розвиток теоретичних знань, побудова теорії об'єкта, що вивчається. І нарешті, побудована теорія за допомогою різних інтерпретацій застосовується до нових об'єктів.

Таким чином, можна вказати три основних типи навчальних проблем, які наближають, уподібнюють процес навчання математики процесу дослідження в математиці.

Це, по-перше, проблема математизації, математичного опису, перекладу на мову математики ситуацій і задач, які виникають в математиці (в різних галузях знань, техніки, виробництва) або всередині

математики (наприклад, переклад геометричної ситуації на мову алгебри чи навпаки). В найзагальнішому вигляді її можна назвати проблемою побудови математичних моделей.

Другий основний тип проблем полягає в дослідженні результату розв'язання проблем першого типу, це проблема дослідження різних класів моделей. Результатом розв'язання проблем цього типу є дальший розвиток системи теоретичних знань шляхом включення до неї нових «маленьких теорій».

Третій основний тип проблем пов'язаний з застосуванням нових теоретичних знань, які одержані внаслідок розв'язання проблем другого типу, в нових ситуаціях, що істотно відрізняються від тих, в яких здобуті ці знання. Результатом розв'язання проблем цього типу є перенос математичних знань на вивчення нових об'єктів.

Отже, три основних типи проблем виконують різні функції: розв'язання проблем першого типу дає нові знання; розв'язання проблем другого типу приводить ці знання в систему; розв'язання проблем третього типу розкриває нові можливості застосування цієї системи знань.

Незважаючи на очевидні переваги проблемного навчання перед непроблемним, ні на одному з етапів шкільне навчання не можна будувати цілком як проблемне. Це вимагає багато часу, значно більше, ніж можливо виділити на навчання математики. Більш того, перевідкриття всього програмового матеріалу в процесі навчання привело б до збіднення цього процесу (наприклад, у формуванні навичок самостійної роботи з книгою, засвоєння лекцій та ін.).

Тому виникає педагогічна проблема відбору фрагментів шкільного курсу математики — окремих розділів, тем, пунктів для здійснення проблемного навчання. Цей відбір вимагає проведення логіко-дидактичного аналізу навчального матеріалу, з'ясування можливості постановки основних або інших типів проблем, їх ефективності в досягненні цілей навчання. В більшості це залежить і від конкретних умов роботи в тому чи іншому класі.

Виклад навчального матеріалу в шкільних підручниках мало пристосовано до проблемного навчання. Але навчальні тексти можна легко переробити для здійснення такого навчання.

До методів проблемного навчання відносяться такі: дослідний, евристичний і метод проблемного викладу.

Центральне місце в проблемному навчанні займає **дослідний метод.** Він передбачає побудову процесу навчання подібно процесу наукового дослідження, здійснення основних етапів дослідного процесу, зрозуміло, в спрощеній, доступній для учнів формі: встановлення невідомих (незрозумілих) фактів, що підлягають дослідженню (ядро проблеми); уточнення і формулювання проблеми; висунення гіпотез; складання плану дослідження, здійснення плану дослідження; дослідження невідомих фактів та їх зв'язків з іншими, перевірка висунутих гіпотез; формулювання результату; оцінка значимості одержаного нового знання, можливостей його застосування. Важлива особливість дослідного методу полягає в тому, що в процесі розв'язування одних проблем постійно виникають нові.

Дослідний метод у навчанні, однак, тільки в якійсь мірі імітує процес наукового дослідження. Навчальне дослідження відрізняється від наукового деякими істотними особливостями. По-перше, як уже згадувалося вище, навчальна проблема, тобто те, що досліджується в процесі проблемного навчання, і та істина, яку відкривають учні, для науки не є новими. Але вони нові для учнів, а відкриваючи для себе те, що в науці давно відкрито, учні на цьому етапі своєї навчальної діяльності міркують як першовідкривачі. Тому застосування дослідного методу в навчанні відносять до дидактики «перевідкриття», тобто учнів підводять до самостійного «перевідкриття» того, що в науці вже давно відкрито.

По-друге, стимули учнів до проведення дослідження відрізняються від стимулів, які спонукають вченого на дослідження. Навчальне дослідження проводиться учнями під керівництвом, при особистій участі і за допомогою вчителя. Ця допомога повинна бути такою, щоб учні вважали, що вони самостійно досягли мети.

Д. Пойа розрізняє **внутрішні і зовнішні** підказки. Перші такі, що вони немов би добувають в учнів їх власні думки, другі, більш жорсткі, залишають учням тільки виконання технічної роботи, знімаючи потребу пошуку. Природно, що керівництво пошуком учнів вимагає доброї методичної підготовки, розробки для кожного навчального дослідження, яке планується, відповідної системи питань-вказівок (підказок), що «підштовхують» учнів у напрямі пошуку.

По-третє, як і кожний інший метод навчання, дослідний не є універсальним. У молодших і середніх класах школи в діяльність учнів можна включати тільки окремі елементи досліджень. Це є підготовкою для застосування в старших класах дослідного методу в більш розвиненій і складній формі. Але й на цьому етапі навчання цей метод можна застосовувати лише для вивчення окремих тем, питань.

Для того щоб знання учнів були результатом їх власних пошуків, керованих вчителем, їх самостійної пізнавальної діяльності, необхідно організовувати ці пошуки, розвивати пізнавальну діяльність учнів, що, безперечно, є складним завданням, яке потребує методичної підготовки більш високого рівня, ніж пояснення викладеного в шкільному підручнику матеріалу і вимагання його заучування учнями.

Щоб учитель зміг організувати процес навчання школярів, подібно процесу дослідження, створювати педагогічні ситуації, які стимулюють ці відкриття, керувати творчим пошуком учнів, він повинен мати деякий власний досвід дослідницької роботи, хоч би на рівні навчальних досліджень, мати на власному рахунку чимало «відкрить», нехай і маленьких для себе. Висловлюючись словами Д. Пойа, вчитель повинен сам відчути «напруженість пошуку і радість відкриття», щоб він зміг викликати їх у своїх учнів. Учень, який пережив радість відкриття, сміливо йде на пошук розв'язування нових задач. Він уже знає, що його чекає, що напруженість пошуку змінюється радістю відкриття.

Неважко помітити в цьому велике виховне і розвиваюче значення дослідного методу.

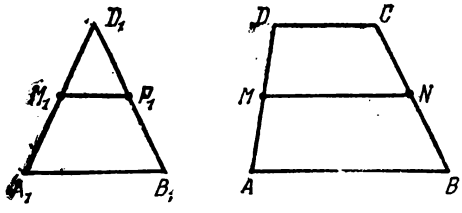


Рис. 32

Розглянемо конкретний приклад застосування дослідного методу в навчанні математики, наближення процесу навчання до процесу дослідження, а саме вивчення середньої лінії трапеції.

Учні вже знайомі з властивістю середньої лінії трикутника. Здається, доцільним використати ці знання для вивчення середньої лінії трапеції. Але робити це можна по-різному. Опишемо один з можливих варіантів побудови процесу дослідження, зв'язаного з вивченням властивостей середньої лінії трапеції. Цей процес передбачає створення проблемної ситуації, яка стимулює відкриття учнями властивостей середньої лінії трапеції, пошук, відкриття і побудову доведення цих властивостей.

1. Пригадуємо властивості середньої лінії трикутника:

$$M_1P_1 \parallel A_1B_1 \text{ і } M_1P_1 = \frac{A_1B_1}{2} \text{ (рис. 32).}$$

2. Нехай в трапеції $ABCD$ M і N — середини непаралельних сторін, тобто $AM = MD$ і $BN = NC$, MN — середня лінія трапеції $ABCD$ (див. рис. 32).

Можна поставити питання: «Як можна сформулювати означення середньої лінії трапеції?» Це питання не викликає труднощів в учнів.

3. Природно, виникає **проблема**, які властивості має середня лінія трапеції. Для учнів це питання — проблема, як і було це проблемою досить давно для того, хто вперше відкрив і довів ці властивості.

Цілком імовірно, що більшість учнів відразу ж помітять за рисунком паралельність середньої лінії основам трапеції. Якщо ж учні натрапляють на труднощі висунути проблему, то їх увагу слід звернути на властивості середньої лінії трикутника, спеціально зображеного рядом з трапецією на рис. 32.

Після того, як буде висунута гіпотеза про паралельність середньої лінії трапеції до її основ, можна встановити, яке твердження достатньо довести для ствердження цієї гіпотези. Якщо деякі учні вкажуть твердження

$$«MN \parallel AB \text{ і } MN \parallel DC»,$$

то можна запропонувати їм питання: «Чи необхідно доводити паралельність середньої лінії до обох основ трапеції?»

Мабуть, деякі учні здогадаються, що достатньо довести паралельність середньої лінії до однієї з основ, тобто для ствердження висунутої гіпотези достатньо довести твердження

$$«MN \parallel AB» \text{ або } «MN \parallel DC».$$

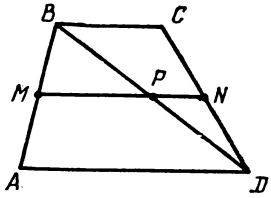


Рис. 33

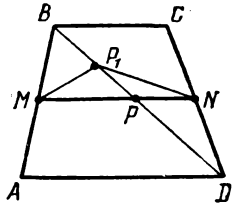


Рис. 34

Друга властивість середньої лінії трапеції не підказується рисунком. Можна звернути увагу учнів на те, що ми висунули гіпотезу про наявність у середньої лінії трапеції властивості, схожої з першою властивістю середньої лінії трикутника. Природно виникає питання, чи не має в середній лінії трапеції властивості, аналогічної другій властивості середньої лінії трикутника, тобто питання про зв'язок середньої лінії трапеції з довжиною її основ.

Навряд чи вгадають цей зв'язок учні. Тому можна поставити перед ними питання: «Чи не можна утворити в трапеції які-небудь трикутники, щоб зв'язати середню лінію трапеції з середньою лінією трикутника?»

Деякі учні запропонують провести одну з діагоналей трапеції (на уроці, на якому застосовувався описаний метод, була і пропозиція провести через вершину B паралель до сторони CD, яка також розглядалася).

Провівши, наприклад, діагональ BD (рис. 33) і позначивши через P її точку перетину з середньою лінією MN, деякі учні будуть стверджувати, що MP — середня лінія трикутника ABD, а PN — середня лінія трикутника BCD, і відразу ж «доведуть» паралельність середньої лінії трапеції її основам, встановлять і другу властивість: через те що

$$MP = \frac{1}{2} AD, \qquad PN = \frac{1}{2} BC,$$

то

$$MN = MP + PN = \frac{1}{2}(AD + BC).$$

Можливо, деякі учні помітять істотну прогалину в цих міркуваннях і скажуть, що все це правильно, якщо ми доведемо, що P — середина діагоналі BD. Коли ж учні цього не помітять, то можна поставити такі питання:

«На якій основі ви стверджуєте, що MP — середня лінія трикутника ABD, а PN — середня лінія трикутника BCD?»

«Що називається середньою лінією трикутника?»

«Що ж залишається довести, щоб обгрунтувати твердження MP —середня лінія трикутника ABD і PN — середня лінія трикутника BCD?»

За допомогою цих питань з'ясовується, що для твердження висловленої гіпотези про властивість середньої лінії трапеції достатньо довести, що $BP = PD$.

Як бачимо, сформульована на початку проблема знаходження властивості середньої лінії трапеції розбилась на кілька проблемних задач, одна з яких — довести, що P — середина діагоналі BD. Розв'язання цієї задачі забезпечує розв'язання і всієї проблеми.

Який же дальший природний хід думки? Мабуть, припущення про те, що P не є серединою відрізка BD. Ми маємо тут наочний приклад, коли непряме доведення (від супротивного) більш природно виникає в процесі дослідження, ніж пряме доведення, яке вміщено в підручнику.

Розглянемо пошук непрямого доведення: «Що випливає з твердження, що $BP = PD$?» З цього твердження випливає, що на відрізку BD існує точка P, відмінна від точки P ($P_1 \neq P$) і така, що $BP_1 = P_1D$, тобто P_1 — середина BD (рис. 34).

З цього учні одержать ряд наслідків: MP_1 — середня лінія трикутника ABD, P_1N — середня лінія трикутника BCD, отже, $MP_1 \parallel AD$ і $P_1N \parallel BC$. А через те що $BC \parallel AD$, то $P_1N \parallel AD$.

Звертаємо увагу учнів на два одержаних із нашого припущення наслідки: $MP_1 \parallel AD$ і $P_1N \parallel AD$. Деякі учні зможуть помітити, що через точку P проведено дві різні прямі MP_1 і P_1N, паралельні одній прямій AD, що суперечить аксіомі паралельних.

Якщо ж вони цього не помітять, то можна запитати: «Скільки прямих, паралельних AD, проведено через точку P_1?», «Чому стверджуєте, що прямі MP_1 і P_1N різні?»

Таким чином, наше припущення, що середина відрізка BD відмінна від точки P, приводить до протиріччя аксіомі паралельних. Отже, це припущення хибне, а його заперечення ($P_1 = P$) істинне.

Тепер учні самостійно сформулюють теорему, яка виражає властивості середньої лінії трапеції, і побудують її доведення, яке, по суті, вже відкрито ними (за допомогою вчителя).

Доцільно продовжити дослідження, щоб з'ясувати, чи не є встановлені властивості середньої лінії трапеції характеристичними для трапеції (які виділяють з множини опуклих чотирикутників підмножину трапецій). Можна попробувати з'ясувати це для кожної з двох властивостей окремо.

Для першої властивості це очевидно: коли відрізок, що з'єднує середини двох протилежних непаралельних сторін чотирикутника, паралельний двом іншим його сторонам, то цей чотирикутник — трапеція ($MN \parallel BC$ і $MN \parallel AD \Rightarrow AD \parallel BC$). Тут можливі труднощі лише в формулюванні перетворення першої властивості. В такому випадку доцільно перетворити формулювання першої частини доведеної теореми («Середня лінія трапеції паралельна до її основ»), подавши її у вигляді імплікації, використовуючи при цьому означення середньої лінії: «Якщо чотирикутник — трапеція, то відрізок, що сполучає середини двох непаралельних сторін, паралельний двом іншим її сторонам (основам)». В цьому випадку легше сформулювати обернене твердження: «Якщо в чотирикутнику відрізок, що сполучає середини двох непаралельних сторін, паралельний двом іншим його сторонам, то цей чотирикутник — трапеція».

Істинність перетворення другої властивості середньої лінії трапеції менш очевидна. Виникає проблема: якщо відрізок, що сполучає середини двох протилежних непаралельних сторін чотирикутника, дорівнює півсумі двох інших його сторін, чи буде цей чотирикутник трапецією?

Висувається гіпотеза, що такий чотирикутник — трапеція, тобто, що твердження

$$«\left(AM = MB \text{ і } DN = NC \text{ і } MN = \frac{BC + AD}{2}\right) \Rightarrow (BC \parallel AD)»$$

(див. рис. 34) істинне (є теоремою). Як же це довести?

Виконане дослідження властивостей середньої лінії трапеції показує нам і спосіб доведення цієї оберненої теореми.

Напевно, деякі учні догадаються провести діагональ $[BD]$, розглянути $\triangle ABD$ і $\triangle BCD$ і помітять, що коли P — середина діагоналі, то одержимо доведення паралельності BC і AD. Таким чином, залишається довести, що $BP = PD$, а для цього знову можна припустити, що $BP = PD$ і що існує на BD точка P_1 $(P_1 \neq P)$ така, що $BP_1 = P_1D$. Якщо ж учні не здогадаються, то спрямувати їх пошук можна за допомогою тих же питань, які були поставлені, коли шукали доведення першого твердження. Дальший же хід доведення (зведення до протиріччя) вже істотно відрізняється від попереднього.

Якщо ж учні зустрінуться з труднощами, то їх увагу слід звернути на те, що при доведенні твердження, оберненого першій частині теореми про середню лінію трапеції, ми використали першу властивість середньої лінії трикутника. Можна припустити, що при доведенні твердження, оберненого другій частині, треба використати другу властивість середньої лінії трикутника. Використовуючи цю властивість, учні одержать

$$MP_1 + P_1N = \frac{1}{2}(BC + AD).$$

Але, з другого боку, через те що $P_1 \notin MN$, то $MP_1 + P_1N > MN = \frac{1}{2}(BC + AD)$, тобто $MP_1 + P_1N > \frac{1}{2}(BC + AD)$.

Ми одержали протиріччя: $MP_1 + P_1N = \frac{1}{2}(BC + AD)$ і $MP_1 + P_1N > \frac{1}{2}(BC + AD)$, яке доводить теорему: «Якщо відрізок, що з'єднує середини двох протилежних сторін чотирикутника, дорівнює півсумі двох інших його сторін, то цей чотирикутник — трапеція»

Тут, природно, виникають питання: «Чи залишається це твердження теоремою, якщо в його формулюванні опустити слово «непаралельних?», «Чи не можна побудувати чотирикутник, який не є трапецією, хоч в ньому відрізок, що з'єднує середини двох протилежних сторін, паралельний двом іншим його сторонам?»

Учні знайдуть контрприклад (паралелограм).

Інколи текст підручника підказує можливість застосування другого дослідного методу. Розглянемо як приклад вивчення питання про число точок, які визначають коло.

Навчальний текст часто починається в постановки проблеми: «Ви знаєте, що пряма визначається двома точками. Скільки точок треба задати, щоб вони визначили коло?»

Тут важливо правильно використати навчальний текст, щоб подати як можна більше можливості для самостійної дослідницької діяльності учнів. Замість того, щоб повідомити результат, сформульований в підручнику зразу ж після постановки проблеми («Через одну точку можна провести нескінченну множину кіл»), очевидно, доцільно намітити шлях дослідження поставленої проблеми: «З'ясуємо, скільки кіл можна провести через одну точку, через дві, через три і т. д.»

Розв'язуючи задачу про визначення кількості кіл, що проходять через точку A, пропонуємо учням побудувати одне таке коло, друге, третє. Внаслідок учні встановлять, що можна побудувати скільки завгодно таких кіл і що центри можна довільно вибирати на площині.

Розглядаючи задачу про число кіл, що проходять через дві дані точки A і B, можна запропонувати учням побудувати таке коло, потім, якщо можна, ще одно, потім з'ясувати, де розміщені центри цих кіл, побудувати ще одно таке коло і, нарешті, вияснити, скільки можна одержати таких кіл і що являє собою множина їх центрів.

Дослідження проблеми для трьох точок теж можна організувати у вигляді самостійного пошуку розв'язання задачі учнями. Важливо, щоб вони самі відкрили і необхідність розгляду двох випадків ($C \in AB$ і $C \notin AB$).

Цінна якість дослідника полягає саме в тому, щоб завжди шукати вичерпне розв'язання проблеми, тобто розглядати в процесі дослідження всі можливі випадки, які дають і різні розв'язки. З цією метою слід поступово формувати вміння визначити, які окремі випадки проблеми необхідно виділити в дослідженні.

Тому, замість того, щоб повідомити учням те, що написано в підручнику: «Тут можуть зустрітися два випадки: 1) дані три точки лежать на одній прямій; 2) дані три точки не лежать на одній прямій», треба спрямувати учнів на самостійне відкриття цих двох випадків.

Припустимо, що учні почали розглядати випадок для трьох точок, що не лежать на одній прямій. При цьому, очевидно, для керівництва пошуком розв'язання учнями доцільно звернути їх увагу на вже розглянуту задачу для двох точок. Через дві точки A і B проходить нескінченна множина кіл (M_1), їх центри утворюють серединний перпендикуляр до відрізка AB. Через дві точки B і C теж проходить нескінченна множина (M_2) кіл, і їх центри утворюють серединний перпендикуляр до відрізка BC. Природно, виникають питання: чи мають ці дві множини (M_1 і M_2) кіл спільні елементи? Чим є перетин $M_1 \cap M_2$? Де розміщений центр кола, що належить $M_1 \cap M_2$? Чи існує така точка? Скільки є таких точок?

В такому випадку, який розглядається учнями ($C \notin AB$), вони знайдуть одну єдину точку — перетин двох серединних перпендикулярів до відрізків AB і BC. Тут, мабуть, з'явиться в декого догадка, що не завжди така точка існує. Всупереч такому випадку треба поставити перед учнями це питання. Якщо вони не відразу знайдуть випадок, коли такої точки немає, треба їм запропонувати розглянути

інші трійки точок, які відрізняються від розглянутої своїм розміщенням, поки не відкриють випадок, коли три точки належать одній прямій і два серединних перпендикуляри не мають жодної спільної точки.

Таким чином, учні одержують відповідь на поставлену задачу: коло визначається (однозначно) заданням трьох точок, які не лежать на одній прямій. Ця відповідь одержана як результат проведеного ними дослідження під керівництвом учителя.

Як видно з розглянутого прикладу, важливе завдання, яке стоїть перед учителем при підготовці до кожного уроку, полягає в тому, щоб, виходячи з тексту підручника, визначити, що необхідно повідомити учням, а що може стати результатом їх власного пошуку і як керувати цим пошуком. Інакше: стоїть педагогічна задача визначення адекватного методу навчання, який забезпечує адекватну пізнавальну діяльність учнів.

При підведенні підсумків виконаної дослідної навчальної роботи в деяких учнів може виникнути питання: скільки кіл проходить через чотири точки? Цю задачу може поставити і вчитель як природне продовження проведеного дослідження.

Оскільки при розв'язуванні задачі «трьох точок» ми скористались результатом розв'язання задачі «двох точок», учні за аналогією попробують (а якщо ні, то вчитель їм підкаже) використати при розв'язуванні задачі «чотирьох точок» результат розв'язання задачі «трьох точок». Через те, що під час розв'язання задачі «трьох точок» виникла необхідність розглянути два випадки, які дають різні результати, деякі учні можуть запропонувати розглянути і в новій задачі теж два випадки: 1) чотири точки лежать на одній прямій; 2) чотири точки не лежать на одній прямій. Неважко показати помилковість такого висловлення: випадок 1) і випадок, коли тільки три з чотирьох заданих точок лежать на одній прямій, а значить, чотири точки не лежать на одній прямій, тобто випадок 2), дають один і той самий результат — через такі чотири точки не проходить жодне коло, тому такі випадки нерозрізнені. Це заперечення і наводить на думку про доцільність розгляду двох випадків: а) які-небудь три з чотирьох заданих точок лежать на одній прямій; б) ніякі три з заданих чотирьох точок не лежать на одній прямій.

При дослідженні випадку «б», розглядаючи довільні чотири точки A, B, C, D, жодні три з яких не лежать на одній прямій, проводячи через кожні три з них по одному колу, дехто з учнів приходить до помилкового висновку, що через чотири точки, жодні три з яких не лежать на одній прямій, не проходить жодне коло. Подібні помилкові (поспішні) висновки нерідко виникають у проблемних навчальних ситуаціях. Цей помилковий висновок легко заперечити хоч би розв'язанням задачі: «Чи можна провести коло через чотири точки, які являють собою вершини прямокутника?» Позитивну відповідь на це питання дає нам контрприклад: існують чотири точки, через які проходить коло.

Як же виправити вище наведений висновок, щоб він був правильним? За допомогою вчителя учні приходять до нового висновку: не

через кожні чотири точки, жодні три з яких не лежать на одній прямій, проходить (можна провести) коло.

Виникає нова проблема: за яких умов через чотири точки можна провести коло?

Розглядання конкретних чотирьох точок, через які проходить коло (вершини прямокутника, квадрата, деякої рівнобокої трапеції та ін.), а також і таких, через які не проходить коло, приводить учнів до відкриття необхідної і достатньої умови побудови кола, яке б проходило через чотири точки.

Легко помітити, що в цьому дослідженні проблема породжує нові, певним чином пов'язані з нею проблеми, і результатом дослідження є розв'язання не однієї, а багатьох зв'язаних між собою проблемних задач. Задачі виступають в системі, яка визначається загальною ідеєю дослідження.

Проблемне навчання, що здійснюється за допомогою подібних систем задач, орієнтованих на формування нових теоретичних знань, часто називають **навчанням через задачі**.

Наведені приклади побудови процесу навчання, подібно дослідженню, показують, що такий підхід поруч з безперечними позитивними якостями вимагає надто великої кількості часу. Хоч цей додатковий час виправдовується ефективністю розвитку творчого мислення учнів, коли цього часу немає, природно обмежитися застосуванням дослідного методу до окремих тем, які найбільш підходять для цього методу. При такій методиці і в тих випадках, коли деякі теми будуть вивчатися безпосередньо за підручником, без попереднього дослідження, учні будуть дивитися і на цей викладений в підручнику матеріал як на результат деяких досліджень, проведених іншими, що буде позитивно впливати на рівень його засвоєння.

Фактор часу змушує застосовувати в навчанні методи, які є лише частково дослідними.

Другим методом проблемного навчання є **евристичний**, який об'єднує виклад учителем навчального матеріалу і творчий пошук учнів. Однак тут цей пошук не відноситься до процесу пізнання в цілому, як це має місце при дослідному методі, а тільки до одного або до кількох його етапів. Тому евристичний метод можна вважати частково дослідним. При застосуванні цього методу вчитель розчленовує завдання для досліджень на елементи, полегшуючи цим самим процес самостійної творчої діяльності учнів, і скорочує час для розв'язування проблемної задачі.

Описані вище приклади застосування дослідного методу можна легко перетворити для використання евристичного методу. В кожному з них окремі етапи дослідження викладаються вчителем і за допомогою питань і підказок учні продовжують дослідження самостійно. Таким чином, виклад учителя і пошук учнів відповідним чином чергуються.

Відомою формою, яка є зовнішнім проявом евристичного методу, є евристична бесіда. Взаємодія питань учителя і відповідей учнів утворює процес пізнання. Кожна відповідь — розв'язання окремої задачі або виконання окремого кроку розв'язання — сприяє постановці

нового питання. Своїми питаннями вчитель спрямовує мислення учнів у певному напрямі пізнання.

Якщо вчитель не викладає наукові істини (формулювання теорем, їх доведення і т. п.), а в якійсь мірі відтворює шлях відкриття цих знань, то такий метод називають **проблемним викладом**. По суті, вчитель розкриває перед учнями шлях дослідження, пошуку і відкриття нових знань, готуючи їх тим самим до самостійного пошуку в майбутньому.

Проблемний виклад, як і дослідний метод, ставить високі вимоги до наукової підготовки вчителя. Він повинен добре знати не тільки навчальний матеріал, але й шляхи, якими йшла наука, відкриваючи свої істини. В цьому плані велику допомогу надають учителеві перекладені на російську мову книги Д. Пойа «Математика и правдоподобные рассуждения», «Математическое открытие».

Описані два приклади досліджень, якщо все це — і постановка проблем, і їх розчленування, і пошук розв'язання — буде здійснюватися вчителем, стануть прикладами проблемного викладу.

Як видно, проблемний виклад підготовлює базу для застосування дослідного методу.

Необхідно відмітити особливу значимість методів проблемного навчання у виховному відношенні: вони формують і розвивають творчу пізнавальну діяльність учнів, сприяють правильному осмисленню світоглядних проблем.

§ 9. ОСОБЛИВОСТІ ПРОГРАМОВАНОГО НАВЧАННЯ

У 50—60-х роках з'явилось і одержало широку популярність «програмоване навчання», яке потім підлягало критиці. За великим і широко рекламованим піднесенням наступив деякий спад, і до цього часу навколо програмованого навчання ведуться дискусії, в процесі яких висловлюються істотно різні, часом прямо протилежні точки зору.

Нагадаємо, що розуміють під програмованим навчанням і розглянемо деякі особливості цього виду навчання*. Термін «програмоване навчання» запозичений з термінології програмування для ЕОМ, очевидно, тому, що так само, як і в програмах для ЕОМ, розв'язання задачі подається у вигляді строгої послідовності елементарних операцій, у «навчальних програмах» матеріал, що вивчається, подається в формі строгої послідовності кадрів, кожний з яких має, як правило, порцію нового матеріалу і контрольне питання або завдання.

Програмоване навчання не відкидає принципів класичної дидактики. Навпаки, воно виникло внаслідок шукання способів, форм і **методів удосконалення процесу навчання шляхом кращої реалізації** цих принципів. З цією метою воно передбачає:

1) правильний відбір і поділ навчального матеріалу на невеликі порції;

---

* Для більш детального ознайомлення з суттю програмованого навчання радимо: *Болтянський В. Г.* Что такое программированное обучение // Математика в школе. 1970. № 3. С. 20.

2) часто проводиться контроль знань: як правило, кожна порція навчального матеріалу закінчується контрольним питанням або завданням;

3) перехід до наступної порції тільки після ознайомлення учня з правильною відповіддю або характером допущеної ним помилки;

4) забезпечення можливості кожному учневі працювати з властивою йому індивідуальною швидкістю засвоєння, тобто реалізація на практиці індивідуального підходу у навчанні, що є необхідною умовою активізації самостійної діяльності учнів у засвоєнні навчального матеріалу.

Названі чотири особливості і характеризують таке навчання.

Програмоване навчання здійснюється за допомогою «навчальної програми», яка відрізняється від звичайного підручника тим, що вона визначає не тільки зміст, а й процес навчання.

Існують дві системи програмування навчального матеріалу — лінійна і «розгалуджена» програми, які відрізняються між собою важливими вихідними передумовами і структурою. Можливі і комбіновані програми, які являють собою поєднання двох методів програмування.

За лінійною програмою навчальний матеріал подається невеликими порціями, кадрами, до яких входить, як правило, просте питання з цього матеріалу. Передбачається, що учень, уважно прочитавши цей матеріал, зможе дати безпомилкову відповідь на поставлене питання. При переході до наступного кадру учень перш за все взнає, чи правильно він відповів на питання попереднього кадра. Оскільки кожний кадр має досить невелику інформацію з нового матеріалу, то навіть простим порівнянням своєї неправильної відповіді, якщо все таки він помилився, з правильною учень швидко встановлює, де саме ним була допущена помилка.

За розгалудженою програмою навчальний матеріал розбивається на порції, які несуть більшу інформацію, ніж при лінійному програмуванні. В кінці кожного кадра учневі пропонують питання, відповідь на яке він сам не формулює, а вибирає з наведених у цьому ж кадрі декількох варіантів відповідей, з яких тільки одна правильна (метод альтернативи). Неправильні відповіді вибираються авторами програми, зрозуміло, не випадково, а з урахуванням найбільш імовірних помилок учнів. Учень, який вибрав правильну відповідь, відсилається до сторінки, на якій викладена наступна порція нового матеріалу. Учень, що вибрав неправильну відповідь, відсилається до сторінки, на якій роз'яснюється допущена помилка і пропонується повернутися до останнього кадру, щоб, уважно прочитавши ще раз викладений в ньому матеріал, вибрати правильну відповідь або ж в залежності від допущеної помилки відкрити сторінку, на якій подано додаткове пояснення незрозумілого.

Порівнюючи дві системи програмування навчального матеріалу, можна помітити, що при лінійному програмуванні учень самостійно формулює відповіді на контрольні питання, при розгалудженому він вибирає лише одну з декількох готових, уже сформульованих кимсь, відповідей. У першому випадку застосовується система «конструктив-

них відповідей», в другому — так звана система «множинного вибору». В цьому відношенні, очевидно, виявляється деяка перевага лінійної програми, через те, що на виникаючі в будь-якій галузі діяльності питання, звичайно, ніде наперед не пишуть, не заготовлюють відповіді. Учні, які розв'язують ці питання, повинні вміти самостійно формулювати відповіді, а не лише вибирати їх з вже сформульованих.

З другого боку, розгалуджена програма складається з урахуванням можливих помилкових відповідей учнів і з цієї точки зору вона ближче до реального процесу навчання. За розгалудженою програмою важливо те, що різних учнів вона супроводжує до засвоєння нового матеріалу різними шляхами з урахуванням їх можливостей і потреб в додаткових поясненнях і вказівках. Один учень просувається прямо від однієї порції нового матеріалу до наступної, другий — користується додатковими поясненнями, роз'ясненнями його помилкових відповідей, які свідчать про нерозуміння навчального матеріалу. Внаслідок і виходить, що різні учні просуваються в засвоєнні навчального матеріалу з різними індивідуальними швидкостями. Саме врахування цих індивідуальних швидкостей засвоєння, які не приймаються до уваги при непрограмованому навчанні, забезпечує здійснення принципу індивідуального підходу в навчанні.

Розглянемо, як приклад, фрагмент навчальної програми для вивчення поняття наслідку в множині рівнянь або нерівностей.

A_1. Нехай дано два рівняння

$$f(x) = 0, \qquad (1)$$
$$g(x) = 0. \qquad (2)$$

Рівняння (2) називається **наслідком** рівняння (1), якщо воно перетворюється в правильну числову рівність принаймні для всіх тих значень x, при яких рівняння (1) перетворюється в правильну числову рівність.

B_1. Дано рівняння $(x - 1)(x - 2) = 0$. Яке з нижче перелічених рівнянь є його наслідком:

1) $x(x - 2) = 0$ (н. 2);
2) $x - 1 = 0$ (н. 3);
3) $x(x - 1)(x - 2) = 0$ (н. 5);
4) $x - 2 = 0$ (н. 4)?

(н. 2). При $x = 1$ дане рівняння перетворюється в правильну числову рівність, а рівняння $x(x - 2) = 0$ — в неправильну.

Прочитайте ще раз уважно означення наслідку і виберіть правильну відповідь.

(н. 3). При $x = 2$ дане рівняння перетворюється в правильну числову рівність, а рівняння $x - 1 = 0$ — в неправильну.

Прочитайте ще раз уважно означення наслідку і виберіть правильну відповідь.

(н. 4) При $x = 1$ дане рівняння перетворюється в правильну числову рівність, а рівняння $x - 2 = 0$ — в неправильну.

Прочитайте ще раз уважно означення наслідку і виберіть правильну відповідь.

(н. 5). Ваша відповідь правильна.

A_2. Із даного означення виходить, що коли рівняння $g(x) = 0$ є наслідком рівняння $f(x) = 0$, то кожний корінь рівняння $f(x) = 0$ є також коренем рівняння $g(x)$.

B_2. Відомо, що деякі рівняння $f(x)$ мають корені: 1; 3; 4. В якому випадку рівняння $g(x) = 0$ є наслідком рівняння $f(x) = 0$, якщо його корені дорівнюють:

1) 1; 2; 4 (н. 6); 3) 1; 3; 5 (н. 8);
2) 1; 2; 3; 4; 5 (н. 7); 4) 3; 4; 5 (н. 9)?

C_1. (н. 6). Число 3 є коренем рівняння $f(x) = 0$, але не є коренем рівняння $g(x) = 0$.

Поверніться до н. 5, прочитайте ще раз уважно текст і виберіть правильну відповідь.

(н. 7). Ваша відповідь правильна.

A_3. Поняття наслідку поширюється і на нерівності. Якщо задані, наприклад, дві нерівності

$$f(x) > 0 \text{ (або } f(x) < 0); \quad (1)$$
$$g(x) > 0 \text{ (або } g(x) < 0), \quad (2)$$

то нерівність (2) називається **наслідком** нерівності (1), якщо воно перетворюється в правильну нерівність принаймні для всіх тих значень x, при яких нерівність (1) перетворюється в правильну числову нерівність, або кожний розв'язок нерівності (1) є також розв'язком нерівності (2).

B_3. Дано нерівність $x < 5$ (1).

Яка з нижче перелічених нерівностей є наслідком нерівності (1):

1) $x < 1$ (н. 10); 3) $x > 0$ (н. 12);
2) $x < 4$ (н. 11); 4) $x < 10$ (н. 13)? і т. д.

Програмоване навчання можна здійснити з застосуванням так званих навчаючих машин або у вигляді безмашинного навчання, що використовує програмовані підручники.

Основний недолік безмашинного програмованого навчання полягає в його громіздкості, одноманітності. Крім того, маючи можливість вільно перегортати програмований підручник, деякі учні можуть порушувати інструкцію і читати сторінки, які відповідають вибраній відповіді не в тому порядку (якщо підручник складено за розгалудженою програмою), або можуть піддивитись відповідь до того, як самі її сформулювали (якщо підручник складено за лінійною програмою). Практика показала, що безмашинне програмоване навчання сприймається тільки занадто старанними учнями, які при непрограмованому навчанні показують не гірші результати.

Створюються навчаючі машини або автоматизовані системи навчання (АСН) на базі ЕОМ, які автоматично забезпечують виконання навчальної програми: «відкривають» відповіді тільки після того, як учень «повідомив» свою відповідь, «подають» необхідні кадри, змінюють їх послідовність в залежності від вибраних учнем відповідей, тобто забезпечують різні реалізації навчальної програми для різних учнів і т. д.

Інколи програмоване навчання неправильно ототожнюють з машинним навчанням, або навчанням без вчителя. В дійсності ж це не так. Будь-які навчаючі машини, в тому числі і найдосконаліші АСН, являють собою лише автоматизовані системи (а не автоматичні), створювані на допомогу, а не для заміни вчителя.

Програмоване навчання має ряд переваг, перш за все в здійсненні індивідуального підходу, своєчасного зворотного зв'язку учень—учитель. Однак для його впровадження в широку практику навчання ще не має достатніх експериментальних даних. Тут ще потрібна велика дослідна робота, передбачаюча конструювання навчальних машин і АСН, складання раціональних навчаючих програм. Також недостатньо вивчені питання поєднання програмованого навчання з іншими методами викладання, можливості і доцільність застосування окремих елементів програмованого навчання з метою кращого врахування індивідуальних можливостей засвоєння математичного матеріалу сильними, середніми і слабкими учнями. Це особливо слід враховувати в навчанні математики, де межі індивідуальних швидкостей засвоєння ширше, ніж з інших предметів, а орієнтація на ідеалізованого середнього учня приводить, звичайно, до втрати інтересу до предмету в одних і до неуспішності інших.

Всебічне дослідження названих та інших питань дасть можливість зробити програмоване навчання корисним і таким, що його можна буде широко застосовувати в практиці шкільного навчання.

§ 10. СПЕЦІАЛЬНІ МЕТОДИ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ

Ми вже пояснили в § 1, що розуміємо під спеціальними методами навчання. Це адаптовані для навчання основні методи пізнання, що застосовуються в самій математиці, характерні для математики методи вивчення дійсності (побудова математичних моделей, способи абстрагування, які використовуються для побудови таких моделей, аксіоматичний метод).

Розглядаючи в § 2—9 різні загальні методи навчання, конкретизовані з урахуванням специфіки математики, ми вже розглянули на конкретних прикладах і спеціальні методи навчання математики.

Так, у зв'язку з розглядом методу аналізу і синтезу (§ 7) було описано підхід до розв'язування задач, відомий під назвою «Зведення задачі до сукупності підзадач». На конкретному прикладі показано пошук доведення з використанням І/АБО-графа. Це теж є спеціальним методом навчання математики, враховуючи ту роль, яку відіграє в ній доведення.

Розглядаючи методи проблемного навчання (§ 8), ми на прикладі показали можливість наближення процесу навчання математики до процесу дослідження в самій математиці.

Як видно, в попередньому викладі, і особливо в ілюстративному матеріалі, загальні методи переплітаються з спеціальними методами навчання математики, що відповідають реальному процесу навчання.

Нам залишилось виділити й розглянути в загальному вигляді вже ілюстровані на прикладах спеціальні методи навчання математики.

Одним з найбільш плідних методів математичного пізнання дійсності є метод побудови математичних моделей реальних об'єктів, що вивчаються, або об'єктів, уже описаних в інших галузях знань, з метою їх більш глибокого вивчення і розв'язання всіх задач, які виникають у цих реальних ситуаціях, за допомогою математичного апарату.

Математична модель — це наближений опис якого-небудь класу явищ, висловлений на мові якої-небудь математичної теорії, за допомогою системи алгебраїчних рівнянь або нерівностей, диференціальних або інтегральних рівнянь, функцій, системи геометричних тверджень або інших математичних об'єктів.

За допомогою поняття математичної моделі розкривається подвійний зв'язок математики з реальним світом. З одного боку, математика служить практиці у вивченні і освоєнні об'єктів навколишнього реального світу, з другого — саме життя, практика сприяють дальшому розвитку математики.

Якщо в якій-небудь галузі знань поза математикою виникає задача, яку намагаються розв'язати математичними методами, то перш за все здійснюється пошук мови і засобів для перекладу цієї задачі в математичну, тобто для побудови її математичної моделі (ММ).

Можливі два виходи пошуку: така мова і такі засоби є і вдається побудувати модель вихідної задачі або ж такої мови; таких засобів в математиці ще не має і в цьому випадку потреба в розв'язанні поставленої задачі викликає необхідність дальшого розвитку самої математики, в розробці мови і відповідного апарату. Так було, зокрема, з задачами механіки, під впливом яких виникло поняття похідної, була розроблена мова і апарат диференціального числення.

Після того, як побудована математична модель задачі (або ситуації), теж можливі два випадки: одержана конкретна модель належить уже вивченому в математиці класу моделей і тоді математична задача розв'язується вже відомими методами або ж ця модель не вкладається в жодну з відомих схем (ні в один з відомих класів) моделей, розроблених в математиці. В останньому випадку виникає внутрішньо математична проблема дослідження нового класу моделей, що приводить до подальшого розвитку однієї з існуючих математичних теорій або ж до появлення нової.

Цей розвиток математичних теорій знаходить потім застосування до вивчення тієї галузі знань, в якій виникла вихідна задача, а також і інших об'єктів реального світу, які приводять до математичних моделей того ж класу.

Процес навчання математики повинен в деякій мірі імітувати описаний процес дослідження в самій математиці, розкривати її зв'язки з реальним світом, з іншими галузями знань, в яких вона знаходить все нові й нові застосування.

З цієї точки зору навчання, як правило, має починатися з розгляду реальних ситуацій і виникаючих в ній задач, з пошуку засобів для їх математичного опису, побудови відповідних математичних моделей.

Потім об'єктом вивчення повинні стати вже самі ці моделі, їх дослідження, що приводить до розширення теоретичних знань, умінь. Після того як відповідна теорія побудована за участю самих учнів, її апарат застосовується до розв'язання вихідної задачі, а також інших задач, зв'язаних з іншими сферами явищ, але таких, що приводять до моделей цього ж класу.

Виходячи з матеріалу, який підлягає вивченню, міркуючи в оберненому напрямі від цього матеріалу до тих реальних ситуацій і задач, в описі яких він використовується, вчитель вибирає певним чином ці ситуації і задачі для умотивування вивчення нового матеріалу. Якщо, наприклад, нам необхідно приступити до вивчення квадратичної функції, ми можемо вибрати яке-небудь із фізичних явищ, описаних цією функцією (рівномірно-змінний рух, зокрема, вільне падіння, центробіжна сила, електрична напруга); в цьому випадку дослідження моделей зводиться до вивчення нового класу моделей, функцій $y = ax^2 + bx + c$. Після цього дослідження ми вже можемо використати нові теоретичні значення для вивчення будь-якого з перелічених вище та інших фізичних (і не лише фізичних) явищ, які описуються моделлю цього класу.

Якщо клас явищ, що розглядається, приводить до нового, поки що не вивченого типу рівнянь, то дослідження моделі полягає в пошуку загального методу (алгоритму) розв'язання нового класу рівнянь.

Якщо вихідна ситуація, що розглядається, описується за допомогою геометричних тверджень, то виникає необхідність в пошуку мінімальної множини речень, які описують дану ситуацію, і у вивченні наслідків з них, що вже було показано вище на конкретних прикладах. Цей вид дослідження моделі (логічна організація математичного матеріалу) приводить до побудови маленької теорії.

Легко помітити, що описана вище схема навчання математики забезпечує цілком природне здійснення міжпредметних зв'язків.

В математиці частіше всього застосовується метод встановлення істинності тверджень, який одержав назву «аксіоматичного методу». Деякі твердження приймаються за вихідні, первинні (їх називають аксіомами); істинність інших тверджень, які не ввійшли до списку аксіом, що називаються теоремами, встановлюється за допомогою логічного доведення, в якому, звичайно, неявно використовуються правила логічного слідування (виведення), що гарантує істинність висновку при істинності посилок. Явне використання цих правил виведення (дедукції) перетворює таким чином побудовану математичну теорію в дедуктивну (аксіоматичну) систему.

Аксіоматичний метод широко застосовується в математиці для побудови теорій. В якому ж вигляді аксіоматичний метод, властивий математиці, може бути адаптований як метод навчання математики? Зрозуміло, що, виходячи з принципу активності учіння, мова повинна йти не про вивчення готової, вже побудованої аксіоматичної теорії, що частіше всього й спостерігається в навчанні геометрії, а про навчання аксіоматизації, тобто про посильне залучення учнів до безпосе-

редньої побудови такої теорії. В цьому й полягає специфічне для математики здійснення принципу активності в навчанні.

Аксіоматизацію можна здійснювати на двох істинно різних рівнях: а) глобально, тобто в межах всієї теорії; б) локально, тобто в межах невеликої теми, коли будують «маленьку теорію» всередині великої. Глобального рівня аксіоматизації не можна досягти, не можна реалізувати ні на якому етапі шкільного навчання. Можливість і доцільність здійснення навчання локальній аксіоматизації (або локальній логічній організації математичного матеріалу) стверджена рядом експериментів.

Ми вже показали і загальну схему, і приклад такого навчання. Однак аксіоматизація не обмежується логічною організацією множини тверджень, тобто встановленням вихідних і доведенням на їх основі останніх. Аксіоматизація означає, крім того, ще й абстрагування від конкретної природи об'єктів і смислу відношень, операцій, тобто перехід до більш високого ступеня абстракції. Цей другий аспект аксіоматизації значно менше здійснюється в навчанні, ніж перший (логічна організація). Все ж, здається, доцільним, в тому числі з методичної точки зору, ознайомити з ним учнів старших класів на вдало підібраних для цього прикладах.

Як приклад можна відмітити загальність властивостей арифметичних операцій в різних числових системах. Явне виділення таких властивостей приводить до поняття комутативного кільця. На факультативних заняттях в старших класах виділені аксіоми можуть підлягати вивченню з метою узагальнення знань про числову систему. Тут знайдуть своє розкриття багато математично істотних і пізнавально цікавих фактів (правило знаків, причина, за якої опускають дужки у виразах виду $a + b + c$), а також з'явиться можливість вивчити з позиції аксіоматичного методу різні інтерпретації побудованої теорії: числові системи, кільця многочленів, кільця порівнянь (конгруенції) за $\mathrm{mod}\, n$ і т. д.

Темою багаторічної дискусії в методичній літературі є два аспекти проблеми відображення аксіоматичного методу в шкільному навчанні математики: а) в якій мірі аксіоматичний метод можна використати як спосіб побудови шкільного курсу математики або окремих її розділів; б) в якому вигляді та на якому конкретному матеріалі, на якому етапі навчання можливе ознайомлення учнів з самим аксіоматичним методом.

Виходячи з функцій аксіоматичного методу в самій математиці як методу побудови математичних теорій, можна прийти до висновку про можливість його використання як методу навчання, якщо в процесі навчання залучати самих учнів до побудови «маленьких теорій», які поступово розширюють теорію, що вивчається. При цьому «маленькі теорії» включаються в цю математичну теорію. Конкретні приклади такого методу навчання уже наведені раніше.

Аксіоматичний метод як метод навчання є ефективним засобом систематизації знань учнів, усвідомлення того, «що з чого випливає», для встановлення істинності висловлень специфічним для математики способом, для виведення нових знань з існуючих.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Дидактика* средней школы / Под ред. М. А. Данилова, М. Н. Скаткина. М.: Просвещение, 1975.
2. *Жалдак М. І.* Методика вивчення основ інформатики та обчислювальної техніки в педагогічному вузі: Учб. посібник. К.: Вид-во Київськ пед. ін-ту, 1986. 73 с.
3. *Ильина Т. А.* О теории и практике программированного обучения // Сов. педагогика. 1964. № 1.
4. *Коваленко В. Г., Тесленко І. Ф.* Проблемний підхід до навчання математики. К., 1985.
5. *Махмутов М. И.* Проблемное обучение. М.: Педагогика, 1975.
6. *Нильсон О. Л.* Искусственный интеллект: Методы поиска решений. М.: Мир, 1973.
7. *Оконь В.* Основы проблемного обучения. М.: Просвещение, 1968.
8. *Педагогика:* Совместный труд АПН СССР и АПН ГДР. М.: Педагогика, 1980.
9. *Пойа Д.* Как решать задачу? М.: Учпедгиз, 1969.
10. *Пойа Д.* Математическое открытие. М.: Наука, 1976.
11. *Потоцкий М. В.* О педагогических основах обучения математике. М.: Учпедгиз, 1963.
12. *Чучуков В. Ф.* Математичні диктанти для 4 и 5 класів: Метод. посібник. К.: Рад. шк., 1985. 63 с.
13. *Шамова Т. И.* К вопросу о методах преподавания и учения // Сов. педагогика. 1974. № 1.
14. *Методы* обучения математики / Под ред. А. А. Столяра. Минск: Высш. шк., 1981.
15. *Фройденталь Х.* Математика как педагогическая задача / Пер. с нем. М.: Просвещение, 1982.
16. *Вопросы* алгоритмизации и программирования обучения / Под ред. Л. Н. Ланда. М.: Педагогика, 1973. Вып. 2.
17. *Показникова* і логарифмічна функція: Посібник з програмованого навчання. К.: Вид-во Київськ. пед. ін-ту, 1975.
18. *Психологія* програмованого навчання / За ред. Г. С. Костюка, Г. О. Балла. К.: Рад. шк., 1973.

РОЗДІЛ 5

РОЛЬ ЗАДАЧ У НАВЧАННІ МАТЕМАТИКИ. НАВЧАННЯ ЗАГАЛЬНИМ МЕТОДАМ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

У процесі навчання математики задачі виконують різноманітні функції. Навчальні математичні задачі є досить ефективним і часто незамінним засобом засвоєння учнями понять і методів шкільного курсу математики зокрема і математичних теорій взагалі. Задачам належить велика роль у розвитку математичного мислення учнів, у формуванні у них умінь і навичок щодо практичного застосування математики. Розв'язання задач сприяє досягненню тих цілей, які ставляться перед навчанням математики. Саме тому на розв'язування задач відводиться половина навчального часу уроків математики (700—800 академічних годин в V—IX класах). Правильна методика навчання розв'язуванню математичних задач відіграє істотну роль у формуванні високого рівня математичних знань, умінь і навичок учнів.

У цьому розділі розглядаються загальні і найважливіші аспекти використання задач при навчанні математики, загальні методи, що

застосовуються для їх розв'язання. Значна увага приділяється організації процесу навчання розв'язуванню задач на уроках, наводяться практичні рекомендації відносно роботи над задачею.

§ 1. ЗНАЧЕННЯ НАВЧАЛЬНИХ МАТЕМАТИЧНИХ ЗАДАЧ

1.1. Освітнє значення математичних задач. Розв'язуючи математичну задачу, учень знайомиться з ситуацією, що в ній описана, з математичною теорією до її розв'язання, пізнає нові методи розв'язання або нові розділи математики. Інакше, розв'язуючи математичні задачі, учень набуває математичних знань, підвищує свою математичну освіту. При оволодінні методом розв'язування деякого класу задач формується уміння розв'язувати такі задачі, а при достатньому тренуванні засвоюється і навик, що теж підвищує рівень математичної освіти.

1.2. Практичне значення математичних задач. Під час розв'язування математичних задач учень навчається застосовувати математичні знання для практичних потреб, готується до практичної діяльності в майбутньому, до розв'язання задач, що їх висуває практика, повсякденне життя. Майже у всіх конструкторських розрахунках доводиться розв'язувати математичні задачі, виходячи з інтересів практики. Дослідження і опис процесів та їх властивостей неможливі без використання математичного апарату, тобто без розв'язування математичних задач.

Математичні задачі розв'язуються в фізиці, хімії, біології, опорі матеріалів, електро- і радіотехніці, особливо в їх теоретичних основах. Це означає, що в процесі навчання математики учні повинні розв'язувати і задачі, пов'язані з суміжними навчальними предметами (фізика, хімія, географія и т. п.), а також задачі з технічним і практичним змістом.

1.3. Значення математичних задач для розвитку мислення. Розв'язування математичних задач привчає виділяти умови і висновки, дані і шукані, знаходити спільне, зокрема в даних, порівнювати і протиставляти факти. Цей процес, як зазначав О. Я. Хінчин [24], виховує правильне мислення, і перш за все привчає учнів до повноцінної аргументації. Тобто при розв'язуванні задачі не допускаються необгрунтовані узагальнення, аналогії, ставиться вимога повноти диз'юнкції (розглядання всіх випадків ситуації, що задана в задачі), повноти і витриманості класифікації. В учнів формується особливий стиль мислення: збереження формально-логічної схеми міркувань, лаконічне висловлення думок, чітка розчленованість ходу мислення, точність символіки.

1.4. Виховне значення математичних задач. Перш за все задача виховує своєю фабулою, текстовим змістом. Тому фабула багатьох математичних задач істотно змінюється в різні періоди розвитку суспільства. Так, в дореволюційних збірниках задач і в задачах, які розв'язують сучасні школярі капіталістичних країн, сюжетний зміст багатьох математичних задач пов'язаний з питаннями одержання вигоди при купівлі та продажу товару, розрахунків виграшу-про-

грашу в азартних іграх і т. п. Певна річ, дуже добре, що сюжетний зміст задач, вміщених в сучасних підручниках, спрямовано на виховання в учнів високих моральних якостей, наукового світогляду, інтернаціоналізму, колективізму, гордості за свою Батьківщину. Але, на жаль, в них відсутні задачі, які б розвивали здоровий інтерес до питань прибутку, підвищення життєвого рівня суспільства і т. п. Виховує також сам процес навчання розв'язуванню математичних задач. Правильна методика занять виховує в учнів чесність до праці своїх товаришів. З введенням у школі елементів математичного аналізу виявились більш широкі можливості формування в учнів діалектико-матеріалістичного світогляду.

§ 2. РОЛЬ ЗАДАЧ У ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ

Кожна конкретна навчальна математична задача передбачає досягнення найчастіше не однієї, а декількох педагогічних, дидактичних, навчальних цілей. Названі цілі характеризуються змістом задачі і призначенням, якого надає задачі вчитель. Дидактичні цілі, які ставить перед тією чи іншою задачею вчитель, визначають роль задач в навчанні математики. В залежності від змісту задачі та дидактичних цілей її застосування можна виділити її провідну роль.

2.1. Навчаюча роль. Навчаючу роль математичні задачі виконують в процесі формування в учнів системи знань, умінь і навичок з математики та її конкретних дисциплін. Слід виділити декілька видів задач стосовно їх навчальної ролі.

Задачі для засвоєння математичних понять. Відомо, що формування математичних понять успішно проходить при умові ретельної копіткої роботи над поняттями, їх означеннями і властивостями. Щоб оволодіти поняттям, недостатньо вивчити його означення; необхідно розібратися в смислі кожного слова-означення, чітко знати властивості поняття, що підлягає вивченню. Такі знання набуваються перш за все при розв'язуванні задач і виконанні вправ. Так, для засвоєння поняття логарифму велику користь дають такі вправи: перехід від запису з показниковими функціями та їх значеннями до записів у логарифмічній формі, і навпаки; розв'язання найпростіших логарифмічних рівнянь, до складу яких змінна входить під знаком логарифма і в його основу; формування означення логарифма для конкретного заданого числа при конкретній заданій основі; застосування тотожності $a^{\log_a x} = x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$. Досить корисні й такі задачі:

1. Чи є коректним означення: «Показник степеня, який задовольняє рівності $a^x = b$, називається логарифмом числа b за основою a»? Обгрунтуйте свою відповідь.

2. Проаналізуйте таке формулювання: «Логарифмом даного числа за даною основою є показник степеня». Як уточнити це формулювання, щоб воно стало означенням логарифму?

Задачі для оволодіння математичною символікою. Однією з цілей навчання математики є оволодіння матема-

тичною мовою і, отже, математичною символікою. Найпростіша символіка вводиться в початковій школі та в V--VI класах (знаки дій, рівності та нерівності, дужки, знаки кута, паралельності і т. д.). Правильному використанню символів слід навчати, розкриваючи їх роль і призначення в процесі розв'язування задач.

Подані нижче задачі сприяють розумінню учнями ролі дужок і вчать їх правильному використанню.

3. Прочитайте записані вирази, знайдіть їх числові значення, визначте роль дужок. Вкажіть, в яких виразах дужки не змінюють порядку дій:

1) $1{,}5 + 2\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} - 0{,}1$;

2) $\left(1{,}5 + 2\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}\right) - 0{,}1$;

3) $1{,}5 + 2\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5} - 0{,}1\right)$;

4) $\left(1{,}5 + 2\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{2}{5} - 0{,}1$;

5) $1{,}5 + \left(2\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} - 0{,}1\right)$;

6) $\left(1{,}5 + 2\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{2}{5} - 0{,}1\right)$.

4. Виконайте обчислення, поясніть порядок дій та роль дужок.

1) $5^2 - 4^2$; $(5 - 4)^2$; $5 - 4^2$; $(5 \cdot 4)^2$; $5 \cdot 4^2$; $5^2 \cdot 4^2$;

2) $\frac{1 + t^2}{(1 + t)^2}$ при $t = -8$; 3) $(7z)^2 - 7z^2$ при $z = \frac{1}{7}$.

Істотне значення в оволодінні символікою, що вивчається, має правильне її застосування під час запису розв'язування задач. Учитель повинен уважно стежити за грамотним застосуванням математичних символів в записах. Не можна визнати правильними такі, наприклад, записи: «$p < 2$ на 3»; «доведемо $\perp$-ність прямих a і b». Треба записати: в першому випадку «p менше, ніж 2, на 3» або «$2 - p = 3$», або «$p + 3 = 2$», або «$2 - 3 = p$»; в другому — «доведемо, що $a \perp b$».

Задачі для навчання доведенням. Навчання доведенням — одне з найголовніших завдань навчання математики. Найпростішими задачами, з розв'язування яких практично починається навчання доведенням, є задачі-запитання та елементарні задачі на дослідження. Розв'язування таких задач полягає в знаходженні відповіді на запитання і доведенні її істинності.

Задачі-запитання, звичайно, вимагають для свого розв'язування (доведення істинної відповіді) встановлення однієї імплікації, одного логічного кроку від даних до доводжуваного. Доведення ж при розв'язуванні більш складної задачі або доведення теореми являє собою послідовність кроків-імплікацій.

Метою розв'язування задач-запитань є осмислення, уточнення та конкретизація понять, що вивчаються, і зв'язків між ними. Задачі-запитання необхідні також для засвоєння учнями запроваджуваної символіки і математичної мови. Приклади задач-запитань:

5. $x > y$. Чи обов'язково $x^2 > y^2$?

6. Чи можуть дві бісектриси трикутника бути перпендикулярними? А дві висоти?

Істотну роль у навчанні доведенням відіграють вправи, в яких треба заповнити пропущені слова, символи та їх комбінації в тексті готового доведення. Аналогічні вправи досить часто застосовуються під час вивчення російської мови, на уроках же математики вони зустрічаються рідко, в підручниках і задачниках їх немає зовсім. Починати треба з досить простих задач:

7. Довести, що довжина гіпотенузи прямокутного трикутника більша довжини його катета.

Розглянемо прямокутний $\triangle ABC$, у якого $\angle C = 90°$, AC і ... — його катети, ... — гіпотенуза (рис. 35). Точка C є ... точки B на ..., через те що BC ... CA. За теоремою про перпендикуляр і ... BC ... AB.

Аналогічно, точка ... є ... точки A на пряму BC, оскільки ... $\perp$ ... Тому ... $<$ ... (за теоремою ...).

Задачі на доведення слід використовувати при вивченні всіх математичних предметів і практично можна розв'язувати у всіх розділах.

У курсі математики V—VI класів доведення практично не виконуються, але можна запропонувати найкоротші задачі-запитання, а для окремих учнів і задачі на доведення:

8. Нехай $a \neq 0$, $b \neq 0$. Чи правильно, що $a + b \neq 0$?

9. Виходячи з правил множення раціональних чисел і здійснення переставного закону множення для додатних чисел, доведіть, що переставний закон множення має місце і для добутку будь-яких двох раціональних чисел.

У курсі алгебри VII—IX класів часто застосовують задачі на доведення тотожностей і нерівностей, а також деяких властивостей функцій і т. д.:

10. Доведіть, що коли істинна рівність $x^2 + px + q = (x + \alpha)^2$, то є істинною і рівність $p^2 - 4q = 0$. Сформулюйте і доведіть обернене твердження.

У курсі геометрії VII—IX класів практикуються задачі за готовими кресленнями, які теж є ефективним засобом навчання доведенням:

11. 1. **Дано:** $BD \perp AC$, $AB = BC$. Довести: $AD = DC$ (рис. 36). 2. **Дано:** $BD \perp AC$, $AD = DC$. Довести: $AB = BC$.

Пропонуються задачі на доведення геометричних тотожностей та нерівностей і, звичайно, задачі на доведення теорем, що не входять до програми. Чимало задач на доведення розв'язують учні при вивченні стереометрії.

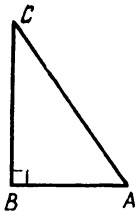


Рис. 35

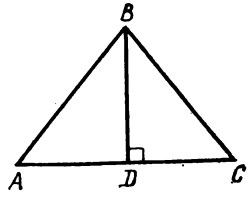


Рис. 36

У курсі математики X—XI класів задачі на доведення варто розв'язувати при вивченні всіх його розділів:

12. Доведіть, що серед раціональних чисел не існує такого, квадрат якого дорівнює: 1) 3; 2) 5; 3) 6; 4) 7; 5) 101.

13. Доведіть, що $\Phi(x) = \cos^2 x$ і $F(x) = -\sin^2 x$ є первісними функції $f(x) = -\sin 2x$ і що $\Phi(x) = F(x) + 1$.

Задачі для формування математичних умінь і навичок (див. далі, § 3.4).

Навчаючу роль відіграють такі задачі: а) які передують вивченню нових математичних фактів; вони сприяють концентрації уваги учнів на ідеях, поняттях, методах математики, які знову вивчаються; б) за допомогою яких вводяться нові поняття і методи; в) які *створюють проблемну ситуацію* з метою формування в учнів нових знань. Тут треба розглянути і задачі, за допомогою яких *підготовлюється* складне для учнів *доведення теореми.*

Створенню проблемної ситуації для введення і вивчення методів розв'язування квадратних рівнянь може бути задача, яка приводить до такого рівняння:

14. Теплохід пройшов за течією річки 48 км і повернувся назад, затративши на весь шлях 5 г. Швидкість течії річки 4 км/г. Знайти власну швидкість теплохода.

Якщо позначити власну швидкість теплохода v (км/г), то для розв'язування задачі можна скласти рівняння

$$\frac{48}{v+4} + \frac{48}{v-4} = 5,$$

яке зводиться до квадратичного рівняння

$$5v^2 - 96v - 20 = 0, \quad v \neq \pm 4.$$

Так виникає проблема вивчення методів розв'язування квадратичних рівнянь.

До вивчення показникової функції можна підійти за допомогою розв'язування такої задачі:

15. Знайти вартість обладнання протягом 4-річної експлуатації, якщо початкова вартість 10 000 крб., а щорічне зменшення вартості (амортизація) становить 5 %.

Розв'язання задачі приводить до формули

$$A = 10000\left(1 - \frac{5}{100}\right)^t,$$

і при заданому значенні $t = 4$ $A = 10000 \cdot \left(\frac{19}{20}\right)^4 \approx 8150$ крб. Формула задає показникову функцію. Розв'язування задачі є добрим умотивуванням деталізованого вивчення показникової функції.

Корисно пригадати, що розв'язування конкретних задач (наприклад, про миттєву швидкість, про дотичну, про густину стержня) приводить до поняття похідної, а задачі про площу криволінійної трапеції, про роботу змінної сили, що діє вздовж прямої, — до поняття інтегралу.

Для підготовки до вивчення більш або менш складних теорем, які відіграють помітну роль в курсі математики, можна запропонувати задачі, що приводять до формулювання теореми, задачі на доведення одного з проміжних фактів в доведенні теореми і т. д. Так, перед доведенням теореми Фалеса інколи корисно розв'язати таку задачу:

16. **Дано:** $AB = BC$, $AM \parallel BN$, $BM \parallel CN$. Довести: $\triangle ABM = \triangle BCN$ (рис. 37). Розв'язання цієї задачі допоможе восьмикласникам у доведенні досить складної теореми Фалеса.

2.2. Розвиток мислення учнів у процесі розв'язування математичних задач. Розумові вміння, сприйняття і пам'ять при розв'язуванні задач. Розв'язування математичних задач вимагає застосування багатьох розумових умінь: аналізувати задану ситуацію; порівнювати дані і шукані, задачу, яка зараз розв'язується, з тією, що раніше була розв'язана, встановлюючи приховані властивості заданої ситуації; конструювати найпростіші математичні моделі, здійснюючи мисленний експеримент; синтезувати, відбираючи корисну для розв'язування задачі інформацію, систематизуючи її; коротко і чітко, у вигляді тексту, символічно, графічно і т. д. оформлювати свої думки; об'єктивно оцінювати одержані при розв'язуванні задачі результати, узагальнювати, або спеціалізувати результати розв'язання задачі; досліджувати особливі проявлення заданої ситуації. Отже, в процесі навчання розв'язуванню математичних задач необхідно враховувати сучасні досягнення психологічної науки.

Радянські психологи встановили, що навіть рівень сприйняття задачі неоднаковий в учнів одного класу. Здібний до математики учень сприймає і одиничні елементи задачі, і комплекси її взаємопов'язаних елементів, і роль кожного елемента в комплексі. Середній учень сприймає лише окремі елементи задачі. Тому при розв'язуванні задач необхідно спеціально аналізувати з учнями зв'язок і відношення елементів задачі. Це створює для учнів полегшення вибору способів переробки умови задачі. Під час розв'язування задачі часто доводиться звертатися до пам'яті. Індивідуальна пам'ять здібного до математики учня зберігає не всю інформацію, а переважно «узагальнені і згорнуті структури». Збереження такої інформації не завантажує мозок надмірною інформацією, а ту, яка запам'ятовується,

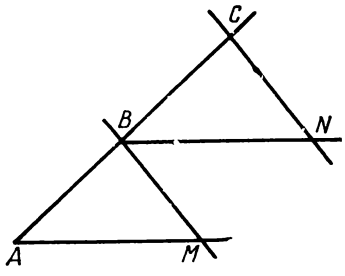


Рис. 37

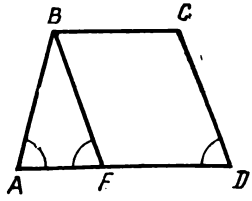


Рис. 38

дозволяє довше зберігати і легше використовувати. Навчання узагальненням при розв'язуванні задач розвиває, таким чином, не тільки мислення, а й пам'ять, формує «узагальнені асоціації». При безпосередньому розв'язуванні математичних задач і навчанні їх розв'язуванню необхідно все це враховувати.

Навчання мисленню. Ефективність математичних задач і вправ в значній мірі залежить від ступеня творчої активності учнів при їх розв'язуванні. Власно кажучи, одне з головних призначень задач і вправ полягає саме в тому, щоб активізувати розумову діяльність учнів на уроці.

Математичні задачі повинні перш за все збуджувати думку (мисль) учнів, заставляти їх працювати, розвиватися, удосконалюватися. Розв'язуючи математичні задачі, учні не тільки виконують побудови, перетворення і запам'ятовують формулювання, а й навчаються чіткому мисленню, умінню міркувати, порівнювати і протиставляти факти, знаходити в них спільне і різне, робити правильні умовиводи (висновки).

Правильно організоване навчання розв'язуванню задач привчає до **повноцінної аргументації** кожного кроку розв'язування, з посиланням у відповідних випадках на аксіоми, введені означення і раніше доведені теореми. З метою формування умінь досить повної і точної аргументації корисно час від часу пропонувати учням записувати розв'язання задач в два стовпчики: зліва — твердження, викладки, обчислення; справа — аргументи, тобто речення, які стверджують правильність висловлених тверджень, викладок і обчислень, що виконуються (в процесі розв'язування задач).

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння $\frac{2}{3x^2+2} = \frac{2}{3x^2+11}$.

Розв'язання

$\frac{2}{3x^2+2} = \frac{2}{2x^2+11} \leftrightarrow 2x^2+11 =$ $= 3x^2+2 \leftrightarrow 3x^2+2 -$ $-2x^2-11=0 \leftrightarrow$	Множення обох частин рівняння на $\frac{1}{2}(3x^2+2)(2x^2+11) \neq 0$ Перенесення членів рівняння з протилежними знаками з однієї частини рівняння в другу
$\leftrightarrow x^2-9=0 \leftrightarrow$	Зведення подібних членів
$\leftrightarrow (x-3)(x+3)=0 \leftrightarrow$	Тотожність $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$
$\leftrightarrow x-3=0$ або $x+3=0 \leftrightarrow$	Властивість добутку, що дорівнює 0
$\leftrightarrow x=3$ або $x=-3$	Перенесення членів рівняння з однієї частини в другу з протилежними знаками

Приклад 2. Доведіть, що в рівнобедреній трапеції кути при основі рівні.

Дано: $AD \parallel BC$, $AB \nparallel CD$ і $AB = CD$. Довести: $\angle BAD = \angle CDA$ (рис. 38).

Доведення

Проведемо $BF \parallel CD$	Аксіома паралельності
$BF = CD = AB \leftrightarrow BF = AB$	Протилежні сторони BF і CD паралелограма $BCDF$ рівні. Використані умова задачі і властивість транзитивності для рівності відрізків
$\triangle ABF$ — рівнобедрений,	Кути при основі рівнобедреного трикутника рівні
$\angle BFA = \angle CDA$	Відповідні кути при паралельних BF і CD та січній AD рівні
$\angle BAD = \angle CDA$	Властивість транзитивності для рівних кутів

Звичайно, немає потреби так записувати розв'язання кожної задачі, допустима і усна аргументація.

Дорослій людині як у повсякденному житті, так і в професіональній праці для прийняття правильних рішень виключне значення має вміння розглянути **всі** можливі випадки ситуації, яка створилася. Це треба пояснювати і школярам. Важливу роль відіграє таке вміння і при вивченні математики, в противному разі неминучі помилки. Уміння ж передбачити всі можливі варіанти деякої ситуації свідчить про рівень розвиненого мислення того, хто розглядає дану ситуацію.

Приклад 3. Побудуйте квадрат: а) за двома даними вершинами; б) за серединами двох протилежних сторін; в) за серединами двох прилеглих сторін; г) за центром і точкою на одній з сторін.

При розв'язуванні цих задач учні повинні розглядати різні варіанти розміщення заданих точок. Так, побудова квадрата за двома його вершинами залежить від того, суміжні чи протилежні ці вершини. При умові, що задані центр і точка лежать на одній стороні квадрата (коли це не вершина квадрата), побудувати конкретний квадрат можна нескінченною кількістю способів. При цьому учні вчаться *розглядати всі можливі варіанти заданої в задачі ситуації*, тобто привчаються до «повноти диз'юнкції».

При розв'язуванні задач часто доводиться класифікувати ті чи інші об'єкти. Неповна класифікація нерідко приводить до того, що який-небудь варіант заданої ситуації залишається поза увагою того, хто розв'язує задачу. Уникнути неповної класифікації допомагають задачі на знаходження таких помилок.

Приклад 4. Вкажіть на помилку в слідуючому «доведенні» і виправте її: якщо $n \in N$, то $\sqrt{n}$ — ірраціональне число.

Нехай $n, p, q \in N$, p/q — нескоротний дріб (в протилежному випадку його можна скоротити і одержати нескоротний дріб), значить, $\frac{p}{q} \in Q$. І нехай $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$, тоді $n = \frac{p^2}{q^2}$, що неможливо, оскільки ліва частина рівності є натуральне число, а права — нескоротний дріб (як квадрат нескоротного дробу). Отже, $\sqrt{n} \notin Q$, тобто $\sqrt{n}$ — число ірраціональне.

Помилка в даному випадку — наслідок неповноти класифікації і диз'юнкції: не розглянуто варіант $\sqrt{n} = k$, $k \in N$. Уже при $n = 4$ маємо $\sqrt{n} = 2$, $2 \in N \subset Q$. Доведено фактично твердження: «Якщо $\sqrt{n} \notin N$, то $\sqrt{n}$ — ірраціональне число».

Уміння міркувати передбачає і вміння оцінювати істинність або хибність висловлень, правильно складати складні висловлення і судження, тобто *логічно правильно вживати* сполучники «і», «або», заперечення «не». Навчання правильному застосуванню цих сполучників допомагає вихованню в учнів математично грамотної мови, а мислення, як відомо, пов'язане з мовою, мовленням людини.

Приклад 5. Правильні чи неправильні такі формулювання: 1) Число 4 задовольняє нерівність $x < 8$ і нерівність $x > 2{,}5$. 2) Не всі прості числа непарні. 3) Число 0,5 задовольняє нерівність: а) $x < 0{,}5$; б) $x \leqslant 0{,}5$; в) $x \geqslant 0{,}5$; г) $x > 0{,}5$?

Доцільно навчити школярів правильно формулювати заперечення тих чи інших тверджень. Таке вміння має особливо велике значення при розв'язуванні задач зведенням до протиріччя.

Істотним для розвитку математичного мислення учнів є формування вмінь правильно виділяти посилки і висновки. Такі вміння формуються, звичайно, під час розв'язання задач на доведення. Вже спочатку необхідні вправи для розчленування деяких тверджень на посилки і висновки.

Приклад 6. Виділіть в нижче поданих твердженнях умову і висновок: 1) «Сума двох парних чисел — парне число»; 2) «Вертикальні кути рівні»; 3) «Добуток будь-яких трьох натуральних чисел ділиться на 6»; 4) «Віддаль між центрами двох кіл, що дотикаються, дорівнює сумі довжин радіусів цих кіл».

Звідси прямий шлях до правильної побудови імплікацій і еквіваленцій, тобто до правильних, чітких формулювань математичних речень.

З а д а ч і, я к і а к т и в і з у ю т ь р о з у м о в у д і я л ь н і с т ь у ч н і в. Ефективність навчальної діяльності з розвитку мислення у великій мірі залежить від ступеня творчої активності учнів при розв'язуванні математичних задач. Значить, необхідні математичні задачі і вправи, які б активізували розумову діяльність школярів. А. Ф. Есаулов [26] поділяє задачі на такі види: розраховані на відтворення (при їх розв'язуванні спираються на пам'ять і увагу); розв'язування яких приводить до нової, невідомої до цього думки, ідеї; творчі задачі. Активізує і розвивае мислення учнів розв'язування задач двох останніх описаних видів. Розглянемо деякі з них.

А. *Задачі і вправи, які мають елементи дослідження*, треба пропонувати вже з перших уроків алгебри і геометрії і навіть на уроках математики в V—VI класах. Наприклад:

1. Чи існують числа, обернені самим собі? Скільки таких чисел? Назвіть їх.

2. При яких значеннях a і b правильні: а) рівності $\frac{a}{b} = 0$; $\frac{a}{b} = 1$; $\frac{a}{b} = -1$; б) нерівності $ab > 1$; $\frac{a}{b} > 1$; $\frac{a}{b} < -1$?

3. Встановіть вид трикутника, класифікуючи за кутами, якщо один з його внутрішніх кутів дорівнює сумі двох інших, більше її, менше її.

У наступних класах слід пропонувати не тільки задачі з елементами досліджень, а й задачі, в яких дослідження є обов'язковою складовою частиною. Такі дослідження необхідно включати в розв'язування багатьох геометричних задач на побудову (як в планіметрії, так і в стереометрії), рівнянь і нерівностей, особливо тригонометричних, показникових і логарифмічних з параметрами, та ін. Задачі і вправи з виконанням деяких досліджень можуть знайти своє місце в усіх розділах шкільного курсу математики, наприклад при вивченні дійсних чисел у X класі.

4. Усі десяткові наближення за недостачею до дійсного числа α, починаючи з деякого, збігаються. Раціональне чи ірраціональне це число α?

І звичайно ж, дослідження широко застосовуються при вивченні функцій та їх властивостей у курсі алгебри і початків аналізу.

Б. Задачі на доведення (див. задачу 3) істинно впливають на розвиток мислення учнів. Саме при виконанні доведень відточується логічне мислення учнів, розробляються логічні схеми розв'язування задач, виникає потреба в обгрунтуванні математичних фактів.

В. Задачі і вправи на встановлення помилок теж мають велике значення в розвитку математичного мислення учнів. Такі задачі привчають звертати увагу на особливо тонкі місця в логічних міркуваннях, допомагають розрізняти в багатьох випадках схожі поняття, привчають до точності суджень і математичної строгості і т. д. Перші вправи на знаходження помилок повинні бути нескладними, наприклад:

5. Учень виконав скорочення дробу $\frac{y^2-4}{y+2}=y-2$ такі перекреслив у чисельнику y^2, а в знаменнику y, написавши над y^2 букву y; потім перекреслив -4 і 2, записавши над -4 число -2.

Чи правильно виконано скорочення? Поясніть.

Задачі на знаходження помилок слід поступово ускладнювати. До таких задач відноситься і знаходження помилок, що допущені у відомих софізмах. Розгляд софізмів прищеплює навички правильного мислення. Виявити помилку в софізмі — значить осмислити її, а осмислення помилки є попередженням від її повторення в інших міркуваннях. Розгляд софізмів розвиває спостережливість, вдумливе і критичне відношення до того, що вивчається, виховує в учнів критичне мислення. Математичні софізми привчають ретельно стежити за точністю формулювань, правильністю записів і креслень при розв'язуванні задач, за допустимістю узагальнень і т. д. До того ж розгляд софізмів захоплюючий.

Приклади софізмів:

6. Маємо правильну числову рівність $16-36=25-45$, звідси $16-36+20\frac{1}{4}=25-45+20\frac{1}{4}$, $\left(4-\frac{9}{2}\right)^2=\left(5-\frac{9}{2}\right)^2$, або $4-\frac{9}{2}=5-\frac{9}{2}$, тобто $4=5$ і $2\cdot 2=5$. В чому полягає помилка?

7. На сторонах AB і AC трикутника ABC як на діаметрах побудуємо півкола (рис. 39), які перетинаються з стороною AC в точках E і D. $\angle AEB = \angle BDC = 90°$, тобто $BE \perp AC$ і $BD \perp AC$. Через точку B проходять два перпендикуляри до прямої AC. В чому полягає помилка?

Інші софізми можна знайти в літературі для учнів, наприклад в [15].

Г. Цікаві задачі. Інтерес до математики повинен бути наслідком перш за все захопленості самою математикою, її логічною побудовою, можливістю практичного застосування. Тому на уроках математики потрібні хоч і нескладні, але цікаві задачі і вправи, які вимагають кмітливості, догадливості і спроможні пожвавити процес навчання.

Особливо корисні цікаві задачі на уроках в неповносередній школі.

8. Як за допомогою одного знака нерівності записати, що число більше — 2, але менше 2?

9. Дано точки A і B. Як за допомогою циркуля і лінійки провести через ці точки пряму, якщо лінійка коротша віддалі між ними?

Багато цікавих задач розглянуто в книгах Ф. Ф. Нагибіна і Е. С. Канніна [17], Б. А. Кордемського 14].

Д. Знаходження різних варіантів і вибір найкращого з них. Психологи встановили, що розв'язування однієї задачі кількома методами приносить більше користі, ніж розв'язування підряд декількох стереотипних задач. Розгляд учнем різних варіантів, вміння вибрати з них найбільш раціональні, прості, витончені свідчать про його здібність мислити, міркувати, проводити правильні умовиводи. Розгляд різних варіантів розв'язування однієї задачі дає можливість учневі застосовувати весь арсенал математичних знань, виховує гнучкість мислення. Пошук раціонального варіанта лише на перших порах вимагає додаткових витрат часу на розв'язування задачі, у подальшому ж ці витрати з лихвою окупаються.

10. Задачу, яку ми розглянули в прикладі 2 (с. 140), можна розв'язувати різними способами. Так, можна довести, що діагоналі рівнобічної трапеції рівні, а потім розглядати $\triangle ABD = \triangle DCA$ за

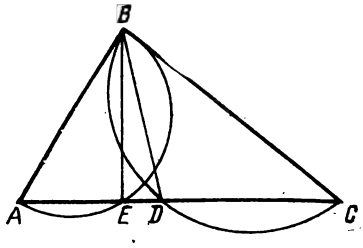


Рис. 39

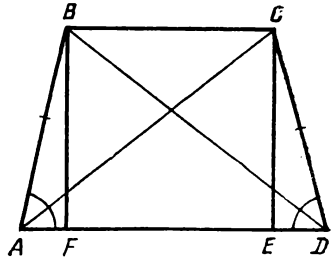


Рис. 40

трьома сторонами (рис. 40). Можна опустити на AD перпендикуляри BF і CE, довести, що $BF = CE$ і $\triangle ABF = \triangle DCE$. Але наведений в прикладі 2 метод розв'язання простіший і раціональніший.

11. При розв'язуванні системи рівнянь

$$\frac{x+50}{100} + 0{,}5 = \frac{x+50}{v},$$
$$\frac{x}{100} + \frac{17}{6} = \frac{x+170}{v} - 0{,}5$$

можна звести рівняння до спільного знаменника, а потім розв'язувати систему рівнянь другого порядку, тобто слідувати загальному алгоритму розв'язування таких систем. Однак спостережливий учень помітить, що при відніманні першого рівняння від другого виключаються $\frac{x}{100}$ і $\frac{x}{v}$, а з одержаного рівняння (практично усно) можна знайти значення v. Ясно, що другий спосіб більш витончений і коротший першого.

Звісно, що раціональним способам треба вчити, розв'язуючи задачі кількома способами і вибираючи кращий з них.

Взагалі ж корисно хоч би познайомити учнів з різними підходами до розв'язування найбільш поширених задач. Подаємо приклад:

Один із заключних уроків геометрії в IX класі вчитель почав з найпростішої задачі: поділити даний відрізок пополам. На превеликий жаль, виявилось, що повний набір креслярських інструментів мають лише шість учнів, а в деяких взагалі не виявилось ніякого інструменту. Тоді вчитель запропонував кожному розв'язати задачу, застосовуючи той інструмент, який в нього є, а тим, у кого не було інструменту, використати прямий кут з цупкого паперу, згорнувши аркуш по вісям симетрії в чотири шари, або його половину — кут в 45°.

Унаслідок цього на уроці було розглянуто вісім варіантів розв'язання за допомогою таких приладів: циркуля і лінійки; прямого кута; двосторонньої лінійки; креслярських трикутників; кута в 45°; кута в 30°; гострого кута і односторонньої лінійки; транспортира і односторонньої лінійки.

Користь такого обговорення не викликає сумніву.

Е. Складання задач учнями. Свідоме вивчення математики і розвиток мислення учнів стимулюються самостійним складанням (конструюванням) математичних задач. При цьому, по-перше, виховується самостійність — школярі оперують вивченими об'єктами і фактами математики і тими, що вивчають, тобто розглядають і оцінюють властивості, відмінності і характерні особливості цих об'єктів; по-друге, розвивається творча розумова діяльність учнів.

Конструювання задач спонукає учнів використовувати великий обсяг інформації, застосовувати міркування, обернені тим, що застосовувались при звичайному розв'язуванні задач. Значить, при складанні задачі учень застосовує логічні засоби, відмінні від тих, за допомогою яких розв'язуються звичайні задачі, відкриває нові зв'язки

між математичними об'єктами, що розвиває мислення. При вивченні перших понять алгебри, наприклад дій в раціональними числами, слід пропонувати учням складати вправи на обчислення, в яких для спрощення обчислень застосовуються закони дій, особливо дистрибутивний. Учні повинні вільно оперувати законами дій.

Дуже корисні вправи на складання рівнянь, корені яких задані, систем рівнянь за даними розв'язками, задач, для яких задані рівняння або їх системи.

Складання математичних задач за даними рівняннями корисно хоч би тому, що ці задачі бувають різноманітними за фабулою, а це переконує в спільності математичних методів.

Слід застерегти вчителя від надмірного захоплення конструюванням задач, оскільки немає потреби доводити цей процес до навички. Отже, не треба пропонувати учням трафарети для складання математичних об'єктів і задач. Кожний трафарет в конструюванні знищує головне, заради чого ці вправи вводяться, а саме творчу думку учня.

Виховна роль математичних задач. Процес навчання тісно пов'язаний з вихованням учнів. У школі навчання не мислиться ізольованим від виховання. Навчаючи розв'язуванню математичних задач, вчитель математики разом з тим виховує учнів, формує в них якості, властиві будівнику суспільного ладу.

Але виховний вплив на учнів справляють і самі математичні задачі. В п. 1.4 йшлося про виховний вплив фабули, сюжету задачі.

Збудженню і розвитку інтересу до вивчення математики сприяє розв'язування задач, які передують вивченню нового матеріалу з математики, що створює проблемну ситуацію. Інтерес до математики підтримується і завдяки розв'язуванню захоплюючих, цікавих стародавніх задач. Таким чином, у проявленні інтересу учнів до математики, у вихованні учнів, захоплених математикою, не останню роль відіграють математичні задачі.

Правильно організоване розв'язування задач виховує в учнів старанність (працьовитість), особливо в процесі самостійної роботи. Під час розв'язування задач формуються **навички розумової праці учнів**: *ретельність* (*старанність*), *уважність*, *зосередженість*. Розв'язування важких задач вимагає від учнів проявлення *наполегливості в подоланні труднощів*, *упертості в досягненні мети*. При цьому виховуються і розвиваються **почуття обов'язку** і **відповідальності** учня за якість засвоєння математичних знань, за оволодіння вміннями і навичками.

Розв'язання задач учні записують в зошитах, учитель пропонує різні форми запису, виховуючи тим самим в учнів **охайність**. При цьому пошук раціонального шляху привчає до охайності і лаконічності записів, чому сприяє також точне виконання креслень за допомогою різних креслярських інструментів.

Розв'язування математичних задач виховує в учнів особливий математичний **стиль мислення**. За О. Я. Хінчиним [24], такий стиль харак-

теризується збереженням формально-логічної схеми міркувань (побудова імплікацій при доведенні з використанням правил виведення, додержання схеми аналіз — побудова — доведення — дослідження при розв'язуванні геометричних задач на побудову і т. д.), лаконічним висловленням думок в словесній і в письмовій формах (чому в неменшій мірі сприяє застосування математичної символіки), чітким розчленуванням ходу мислення, починаючи вже з розв'язування арифметичних задач «за діями», точністю вживаної символіки. Такий стиль мислення теж привчає до охайності.

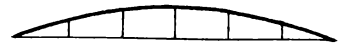


Рис. 41

Велику роль відіграють математичні задачі в здійсненні **політехнічного виховання**. За допомогою задач учні знайомляться з роллю математики в інших науках. Але не можна забувати і про значення інших наук для математики. Задачі інших наук, які приводять до нових математичних понять, прийомів і методів розв'язування, теж мають не абияке значення для політехнічного виховання учнів. Крім того, такому вихованню сприяють практичні задачі, наприклад такі:

1. Арка містка має форму дуги параболи (рис. 41). Висота арки 2 м, довжина хорди, що стягує її, дорівнює 24 м. Арка має 5 вертикальних стояків, закріплених в точках хорди, які розділять хорду на частини рівної довжини. Знайти висоту стояків.

2. На прямолінійній залізній дорозі треба побудувати платформу зупинки поїздів так, щоб сума віддалей від платформи до двох населених пунктів A і B була б найменшою. Розв'яжіть задачу за допомогою циркуля і лінійки.

Розв'язування математичних задач сприяє і формуванню діалектико-матеріалістичного світогляду учнів. Ф. Енгельс в «Анти-Дюрінзі» зазначив, що математика змінних величин — самий визначний розділ, який утворює числення нескінченно малих, є по своїй суті не що інше, як застосування діалектики до математичних відношень. Таким чином, у вихованні діалектико-матеріалістичного світогляду учнів позитивну роль відіграють деякі задачі початків аналізу, застосувань початків аналізу в геометрії, фізиці, астрономії. Задачі про радіоактивний розпад речовини, про ріст населення країни приводять до диференціального рівняння показникового росту або спаду $y' = ky$. Це рівняння, що являє собою математичну модель явища, схематизує його. Тому модель дає правильні результати тільки в деяких межах, зокрема коли йдеться про ріст населення лише при великій його кількості і при значних проміжках часу. За цими межами, пише А. М. Колмогоров, математична модель втрачає реальний смисл і при її бездумному застосуванні приводить до помилкових і безглуздих результатів [10]. У книзі [10] розглядаються і більш прості приклади про рух підкинутого вгору м'яча. В питаннях взаємовідношень теорії і дійсності, математичної моделі і реального світу виявляється глибокий діалектичний взаємозв'язок теорії і практики. Учитель повинен підкреслювати, що математичні моделі задач, моделі дійсності дають можливість одержати цілком реальні знання про саму дійсність, якщо діяти в межах застосування моделі.

§ 3. НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ ЧЕРЕЗ ЗАДАЧІ

Приблизно половина уроків математики в середній школі, про що вже йшлося, відводиться розв'язуванню математичних задач і виконанню вправ. Таким чином, навчання математики здійснюється і при розв'язуванні задач. У § 2 ми вже розглянули навчаючу роль математичних задач: під час їх розв'язування учні засвоюють велику кількість математичних понять і математичну символіку, набувають навичок виконувати доведення і т. д., тобто навчаються математики. Але цим не обмежується навчання математики через задачі. Вчитель ставить перед конкретною задачею дидактичні цілі, в процесі досягнення яких і здійснюється навчання через задачі. Які ж дидактичні цілі можна поставити перед математичними задачами?

3.1. Підготовка до вивчення теоретичних питань математики (нових понять, методів, теорем). Таке призначення мають, наприклад, задачі, розглянуті в п. 2.1, а також ті, за допомогою яких перед вивченням нових теоретичних питань в пам'яті і свідомості учнів відтворюються відомості, необхідні для вивчення нових математичних фактів. Ці задачі не повинні бути складними і можуть розв'язуватися усно.

Приклад 1. Перед вивченням властивостей степенів з раціональними показниками корисними будуть вправи на застосування властивостей степенів з цілими показниками.

Приклад 2. Вивченню розподільного закону множення (відносно додавання) для раціональних чисел можуть передувати задачі, під час розв'язування яких пригадується застосування цього закону для цілих чисел. Саме так учні навчаються правильному застосуванню аналогії.

Розв'язування деяких задач у V—VII класах може бути проведено з таким розрахунком, що після серії задач (вправ) учитель може сформулювати нове твердження (означення, алгоритм і т. д.).

Приклад 3. Введенню означення дії множення додатних і від'ємних чисел можуть передувати вправи на обчислення з такими числами, що виконуються за допомогою моделі термометру. Чітке виділення характеристик (знака і модуля) добутку, порівняння їх з відповідними характеристиками множників дозволяє помітити закономірності виконання множення і сформулювати означення (правило).

3.2. Закріплення тільки що набутих теоретичних знань. Це можуть бути задачі на засвоєння математичних понять та їх означень, на формування вмінь (п. 2.1), закріплення формулювань, аксіом, теорем і методів доведень і т. д. Такі задачі слідують за вивченням теоретичних відомостей (знань).

Приклад 4. Два кути мають спільну вершину. Чи можуть бути вони несуміжними і невертикальними?

Ця задача спрямована на закріплення таких понять, як суміжні і вертикальні кути.

Приклад 5. Для закріплення формулювань теореми Вієта корисно розв'язувати задачі, подібні такій: В рівнянні $x^2 + px + 35 = 0$

один з коренів дорівнює — 7. Знайти другий корінь і значення коефіцієнта p.

3.3. Ілюстрація застосувань вивченого. З такою метою пропонуються задачі практичного змісту, які ілюструють застосування математики в техніці, побуті, суміжних шкільних предметах (див. п. 2.3). Таке ж призначення мають задачі на застосування тотожніх перетворень для спрощення обчислень.

Приклад 6. Обчислити значення виразу $(a + b)^2 - (a - b)^2$ при $a = 4/17$, $b = -4\frac{1}{4}$.

Безпосереднє обчислення тут досить громіздке. Якщо ж спершу виконати тотожні перетворення, то $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$, а значення правої частини обчислюється усно.

Доцільно пропонувати задачі на застосування алгебри для розв'язування геометричних задач.

Приклад 7. Доведіть, що сума двох діагоналей випуклого чотирикутника менша його периметра, але більша півпериметра.

При розв'язуванні цієї задачі застосовуються властивості віддалей (так звана «аксіома трикутника») і властивості нерівностей.

Задачі на застосування можна пропонувати після вивчення теорії, при формуванні вмінь і навичок, а можна і передувати вивченню теорії з метою створення проблемної ситуації.

3.4. Мета формування вмінь. Така мета, звичайно, ставиться при розв'язуванні задач, виконанні перших вправ для оволодіння новим прийомом, алгоритмом, методом розв'язування деякого класу задач, а також задач, які показують практичну цінність способу, прийому, методу, що вивчаються. Під час розв'язування таких задач учні привчаються оперувати щойно вивченим, застосовувати загальний спосіб, алгоритм, метод в конкретній ситуації. Такі задачі не повинні бути складними, в них має чітко проявлятися тільки що вивчене. Лише поступово в задачі можна вводити ускладнення так, щоб уміння, яке знову формується, включалося в систему математичних умінь і навичок учнів, якою вони вже оволоділи. Перші такі задачі слід розв'язувати з повним поясненням учнями всіх нових деталей розв'язання, з докладними записами на дошці. Це допомагає осмисленому формуванню вмінь, осмислені ж уміння швидше формуються і довше зберігаються.

Приклад 8. В перших вправах на множення дробових чисел корисно виконати докладні записи і пояснити їх:

$$1\frac{3}{4} \cdot 1\frac{5}{7} = \frac{7}{4} \cdot \frac{12}{7} = \frac{7 \cdot 12}{4 \cdot 7} = 3.$$

Так відпрацьовується алгоритм множення дробів. Але вже після розв'язання трьох-чотирьох таких задач корисніше не виконувати другий запис $\frac{7}{4} \cdot \frac{12}{7}$ $\left(\text{або третій } \frac{7 \cdot 12}{4 \cdot 7}\right)$. Це економить час і сприяє закріпленню вміння застосовувати алгоритм множення дробових чисел шляхом «згортання» проміжкових операцій (дій).

Формування математичних навичок може бути дидактичною ціллю не окремої задачі, а системи задач і вправ. Уміння оперувати

багатьма прийомами, способами і методами розв'язування задач повинно бути автоматизовано, доведено до навички, щоб технічна сторона не відвертала мислення того, хто розв'язує задачу, а допомогла б розв'язанню. Учні повинні володіти міцними і стійкими навичками обчислень, тотожних перетворень, розв'язування рівнянь, нерівностей та їх систем, геометричних побудов.

Навички формуються на основі осмислених знань і умінь шляхом багаторазового повторення операцій, дій, прийомів, алгоритмів, які є предметом вивчення. Тому для формування навичок потрібна ретельно продумана *система вправ і задач*. У такій системі слід правильно установити послідовність вправ за принципом «від простого до складного» з урахуванням індивідуальних особливостей і можливостей учнів. Необхідно додержувати розумної різноманітності вправ і задач в системі. При цьому знання учнів з математики будуть удосконалюватися по мірі розв'язування кожної нової задачі. Треба прагнути, щоб осмислені уміння і навички учні одержували при найменшій витраті часу.

Міцні, стійкі і глибокі навички формуються тоді, коли вони застосовуються спільно з раніш сформованими уміннями й навичками при виконанні інших дій. Саме таким чином включаються в систему знань людини навички, які тільки що формуються. До того ж розв'язування задач, що вимагають застосування і раніше одержаних навичок, істотно допомагає закріпленню досить важливого вміння застосовувати одержані знання в різних ситуаціях.

Приклад 9. При вивченні розкладу многочлена на множники за допомогою формул скороченого множення після перших вправ на безпосереднє застосування формул бажано включати такі вправи, в яких формули можна буде застосовувати після винесення множника за дужки: 1) $72a^2b^4c - 2b^2c$; 2) $0{,}2mn^3 + 0{,}2mn - 0{,}4mn^2$.

Приклад 10. При вивченні інтегралів корисно включити їх обчислення в систему інших дій.

1. Розв'яжіть рівняння

$$\int_1^x \frac{dx}{x} = 2, \quad \int_0^y 2^{2x+3}\,dx = 4\ln 2.$$

2. Розв'яжіть нерівність

$$\frac{3}{2\sqrt{a}}\int_0^a \left(\sqrt{x} - \frac{2}{3\sqrt{x}} + \frac{2}{3}\right)dx < 4.$$

Розв'язування зазначених і аналогічних задач формує в учнів винахідливість у застосуванні умінь і навичок.

3.5. Повторення раніш вивченого. Під час розв'язування більшості задач учні застосовують раніш одержані знання, уміння і навички. Така особливість математики полягає в тісному взаємозв'язку і взаємообумовленості її розділів. Таким чином, незалежно від цілей, поставлених учителем щодо конкретної задачі, в процесі її розв'язування від-

бувається повторення раніш вивченого. Крім того, повторення вивченого може бути спеціальним визначенням задач, запропонованих учителем. Наприклад, розв'язування задач на завершальних уроках, з тієї чи іншої теми має своїм дидактичним завданням повторення, систематизацію і уточнення знань, одержаних при вивченні цієї теми, і закріплення сформованих умінь і навичок, що теж зв'язано з повторенням. Таке ж призначення задач, які розв'язуються при повторенні математики в кінці кожної навчальної чверті.

3.6. Контроль засвоєння математичних знань. Кожна задача практично має своїм призначенням поточний контроль або самоконтроль. Задачі, які розв'язуються фронтально з відтворенням розв'язання учнями на дошці, спрямовані також на з'ясування утруднень, прогалин у знаннях учнів, рівня засвоєння нових теоретичних знань, методів розв'язування задач, міцності, стійкості і гнучкості раніше одержаних знань, умінь і навичок. Таке ж призначення і тих задач, що їх розв'язують учні самостійно.

У перевірних і контрольних роботах головним призначенням математичних задач є підсумковий контроль того, наскільки правильно вчив учитель і наскільки грунтовні знання одержали учні з тих чи інших розділів математики.

§ 4. ЗАГАЛЬНІ МЕТОДИ НАВЧАННЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЮ МАТЕМАТИЧНИХ ЗАДАЧ

4.1. Аналіз і синтез при розв'язуванні задач. Нагадаємо, що аналіз — це метод міркувань від невідомих, шуканих до даних. Синтез — метод міркувань, який веде від даних до шуканих, невідомих. Обидва ці методи, звичайно, застосовують у взаємозв'язку (див. розд. 4).

Аналіз і синтез практично застосовуються при розв'язуванні кожного виду задач, кожної задачі.

Аналіз і синтез при розв'язуванні задач на доведення.

Задача 1. Куля дотикається всіх трьох бічних граней трикутної піраміди в точках перетину їх бісектрис. Доведіть, що піраміда правильна.

Аналіз. Щоб довести, що піраміда правильна, достатньо довести, що її основою є правильний трикутник ABC (рис. 42), а бічні грані — рівнобедрені рівні трикутники. Для доведення першого твердження досить встановити, що $AC = AB = BC$, а це в свою чергу є необхідною умовою того, що $\triangle ASC = \triangle ASB = \triangle BSC$. Щоб довести ці відношення, достатньо скористатися ознакою рівності трикутників за стороною (бічним ребром піраміди) і двома прилеглими до неї кутами (половинами кутів, прилеглих до цих ребер, оскільки куля дотикається в точках перетину їх бісектрис). Інакше, досить довести, що $\triangle O_1SC = \triangle O_2SC$ і $\triangle O_2BS = \triangle O_3BS$. Останнє є правильним, через те що $O_1S = O_2S = O_3S$, $O_1C = O_2C$ і $O_2B = O_3B$ (як відрізки дотичних, що проведені з однієї точки до кола). Аналіз виконано.

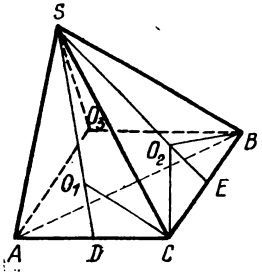


Рис. 42

Якщо строго встановити достатність кожного з наступних тверджень для попереднього йому, доведення можна вважати виконаним. У наведеному ж вигляді аналіз лише намічає шлях доведення.

Синтез. Нехай O_1 і O_2 — точки перетину бісектрис відповідно $\triangle ASC$ і $\triangle SBC$. Маємо: площина (SDE) перетинає задану кулю по деякому кругу, аналогічно площина (CO_1O_2) перетинає цю кулю по другому кругу.

1) $O_1S = O_2S$, $O_1C = O_2C$	Відрізки дотичних, проведених із спільної точки до кола, рівні
2) $\triangle SO_1C = \triangle SO_2C$	За трьома сторонами (див. 1) SC — спільна сторона цих трикутників
3) $\angle O_1SC = \angle O_2SC$, $\angle O_1CS = \angle O_2CS$	Кути в рівних трикутниках, які лежать проти їх рівних сторін, рівні
4) $\overset{\frown}{ASC} = 2\overset{\frown}{O_1SC}$, $\overset{\frown}{ACS} = 2\overset{\frown}{O_1CS}$, $\overset{\frown}{BSC} = 2\overset{\frown}{O_2SC}$, $\overset{\frown}{BCS} = 2\overset{\frown}{O_2CS}$, тому $\angle ASC = \angle BSC$ і $\angle ACS = \angle BCS$	Із співвідношень 3: $O_1S = O_2S$, $O_1C = O_2C$ — бісектриси відповідно $\angle ASC$, $\angle BSC$, $\angle ACS$, $\angle BCS$
5) $\triangle ACS = \triangle BCS$	За стороною SC і прилеглим до неї кутом (див. 4)
6) Із п. 5 $AC = BC$, $AS = BS$	В рівних трикутниках проти рівних кутів (див. 4) лежать рівні сторони

Аналогічно з твердження $\triangle BSC = \triangle ASB$ (або $\triangle ASC = \triangle ASB$) випливає, що $BC = AB$ (або $AC = AB$) і $AS = CS$ (або $BS = CS$). За властивістю транзитивності відношення рівності $AC = BC = AB$ і $\triangle ABC$ — правильний (за означенням); $\triangle ASC = \triangle ASB = \triangle BSC$, $AS = BS = CS$, тобто бічні грані піраміди — рівні рівнобедрені трикутники. Таким чином, піраміда правильна, що й треба було довести.

Аналіз і синтез при розв'язуванні текстових задач. Текстовими задачами тут названі математичні задачі, в яких вхідна інформація має не тільки математичні дані, але й деякий сюжет (фабула задачі). При розв'язуванні текстових задач за допомогою апарату арифметики роль аналізу зводиться до складання плану розв'язування, задача ж частіше всього розв'язується синтетичним методом.

Задача 2. Більша кімната має довжину $5\frac{3}{10}$ м і ширину 4 м, а менша — довжину 4 м і ширину $3\frac{3}{10}$ м. На скільки площа однієї з них більша площі другої?

А н а л і з. Щоб відповісти на питання задачі, треба обчислити різницю площ кімнат, а для цього слід знати площу кожної кімнати. Площа ж кімнати дорівнює добутку її довжини і ширини. План розв'язування задачі: знайти площу кожної з кімнат і від більшої відняти меншу.

С и н т е з. *Перший спосіб.* 1. Яка площа більшої кімнати?

$$5\frac{3}{10} \cdot 4 = 20 + \frac{3 \cdot 4}{10} = 21\frac{1}{5} \text{ (м}^2\text{)}.$$

2. Яка площа меншої кімнати?

$$4 \cdot 3\frac{3}{10} = 12 + \frac{4 \cdot 3}{10} = 13\frac{1}{5} \text{ (м}^2\text{)}.$$

3. На скільки площа першої кімнати більша площі другої кімнати?

$$21\frac{1}{5} - 13\frac{1}{5} = 8 \text{ (м}^2\text{)}.$$

Другий спосіб. Площа більшої кімнати $5\frac{3}{10} \cdot 4$ (м^2), площа меншої $4 \cdot 3\frac{3}{10}$ (м^2), їх різниця $5\frac{3}{10} \cdot 4 - 4 \cdot 3\frac{3}{10} = 4\left(5\frac{3}{10} - 3\frac{3}{10}\right) = 8$ (м^2) (склали вираз, а потім обчислили його значення).

Очевидно, другий спосіб синтетичного розв'язання зручніший, через те що застосування розподільного закону множення (відносно додавання) значно спрощує обчислення.

При розв'язанні текстових задач алгебри (це, як правило, задачі на складання рівнянь, їх систем, нерівностей та їх систем, систем рівнянь і нерівностей) застосувати тільки аналіз або тільки синтез практично не вдається. Справа в тому, що при складанні рівняння, системи рівнянь, нерівностей і т. д. частіше всього йдуть від шуканих (введена зміна) до даних, тобто застосовують аналіз. Розв'язування рівняння, системи рівнянь і т. д. виконується методом синтезу.

Задача 3. Теплохід пройшов за 15 г руху проти течії таку ж відстань, яку він проходить за 13 г руху за течією річки. Знайдіть швидкість течії річки, якщо власна швидкість теплохода 70 км/г.

А н а л і з. Для обчислення швидкості течії річки досить знати власну швидкість теплохода (70 км/г) і швидкість руху його за течією і проти течії річки. Якщо швидкість течії річки v (км/г), то швидкість руху за течією (70 + v) км/г, а проти течії (70 — v) км/г. Очевидно, за течією теплохід пройде віддаль (70 + v) · 13 (км), а проти течії (70 — v) · 15 (км).

За умовою задачі ці віддалі рівні між собою, тобто ми прийшли до даних задачі.

Складаємо рівняння з одним невідомим v, а розв'язавши його, одержимо відповідь на питання задачі.

Синтез

$15(70-v)=13(70+v) \leftrightarrow$	Розподільний закон
$\leftrightarrow 15\cdot 70-15\cdot v=13\cdot 70+$ $+13\cdot v \leftrightarrow$	Перенесення членів рівняння з однієї частини в другу з протилежним знаком, розподільний закон
$\leftrightarrow 28v=(15-13)\cdot 70 \leftrightarrow$	Віднімання цілих чисел
$\leftrightarrow 28v=2\cdot 70 \leftrightarrow v=5$	Ділення обох частин рівняння на $28\neq 0$

Аналогічно застосовуються аналіз і синтез при розв'язуванні текстових задач початків аналізу (до них можна віднести текстові задачі на знаходження найбільших і найменших значень, на складання і розв'язування диференціальних рівнянь і інш.).

Задача 4. Бурова вишка розміщена в полі на віддалі 9 км від найближчої точки шосе. З бурової треба відрядити кур'єра до населеного пункту, розміщеного по шосе в 15 км від згаданої точки (вважаємо шосе прямою лінією). Якщо кур'єр на велосипеді проїжджав полем з швидкістю 8 км/г, а по шосе — 10 км/г, то до якої точки йому треба доїхати, щоб за найкоротший час досягти населеного пункту?

Аналіз. Щоб відповісти на питання задачі, достатньо скласти функцію, що характеризує рух кур'єра в залежності від того, до якої точки шосе він поїде. Це час руху — сума часу руху кур'єра полем і по шосе. Кожний з доданків є відношення віддалі, яку проїжджає кур'єр (по полю BA і окремо по шосе AH), і відповідної швидкості руху (рис. 43). Зручніше вибрати за основну змінну віддаль $MA=x$ (якщо позначити $AH=x$, то вираз $BA=\sqrt{9^2+(15-x)^2}$ менш зручний для дослідження, ніж $BA=\sqrt{9^2+x^2}$). Виражаючи через x і задані сталі інші змінні задачі, складаємо функцію для дослідження:

$$f(x)=\frac{\sqrt{9^2+x^2}}{8}+\frac{15-x}{10}.$$

Синтез. При нашому виборі змінної маємо: $D(f)=[0;\ 15]$. Знайдемо похідну функції та її стаціонарні точки ($x_c=12$). (Викладки ми опустили.) Для знаходження найменшого значення досить обчислити і порівняти $f(0)$, $f(12)$, $f(15)$, $f(0)=\frac{21}{8}$, $f(12)=\frac{87}{40}$, $f(15)=\frac{\sqrt{306}}{8}$ і $f(12)<f(15)<f(0)$.

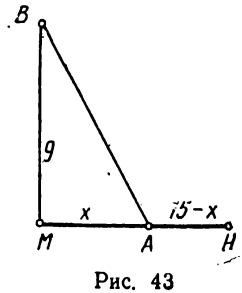


Рис. 43

Отже, кур'єр повинен під'їхати до точки A, розміщеної на віддалі 12 км від точки M і на віддалі 3 км від точки H — пункту призначення.

Аналіз і синтез при розв'язуванні задач на побудову в геометрії. Як відомо, розв'язування конструктивних задач геометрії виконується за таким планом: аналіз, побудова, доведення, дослідження. Назва першої частини — аналіз говорить сам за себе: це дійсно метод аналізу, який приводить від шуканих («припустимо, що

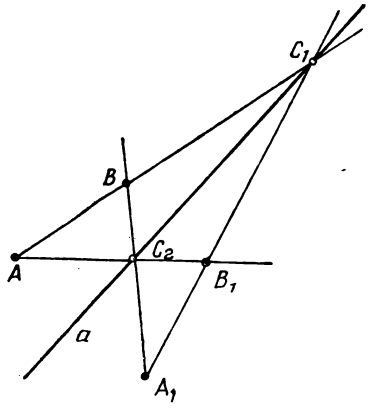


Рис. 44

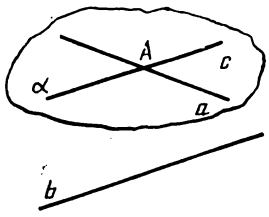


Рис. 45

шукана фігура побудована») до даних, точніше, до їх використання в побудові. При аналізі намічають план побудови, який виконують синтетичним шляхом. При доведенні можливе використання як аналізу, так і синтезу, але частіше застосовують останній. Дослідження передбачає застосування аналізу.

Задача 5. Дано пряму a, симетрично відносно неї точки A і A_1 і точка B. За допомогою однієї лінійки побудуйте точку B_1, симетричну точці B відносно прямої a.

А н а л і з. Припустимо, що задача розв'язана і шукана точка побудована (рис. 44), тобто $B_1 = S_a(B)$. За умовою $A_1 = S_a(A)$. Щоб побудувати точку B_1, достатньо побудувати дві прямі, перетином яких є точка B_1. Ці прямі можна вибрати так:

$$A_1B_1 = S_a(AB) \text{ і } AB_1 = S_a(A_1B).\ A_1B_1 \cap AB_1 = B_1.$$

Щоб побудувати ці прямі, досить знайти точки перетину AB і a (це точка C_1), A_1B і a (точка C_2). Тепер $A_1C_1 \cap AC_2 = B_1$. План побудови складено, всі побудови можна виконати однією лінійкою.

П о б у д о в а (с и н т е з). За допомогою лінійки будуємо A_1B і AB, знаходимо точки C_1 і C_2, будуємо AC_2 і A_1C_1, B_1 — точка їх перетину.

Д о в е д е н н я (с и н т е з). $A_1C_1 = S_a(AC_1)$, $AC_2 = S_a(A_1C_2)$, $AC_1 \cap A_1C_2 = B$, $B_1 = A_1C_1 \cap AC_2$, тому $B_1 = S_a(B)$ (як точки перетину двох пар симетричних відносно a прямих).

Д о с л і д ж е н н я. Ми виходимо з того, що прямі AB і a мають єдину спільну точку. Яким може бути ще розміщення прямих AB і a?

Це прямі площини, тому вони або мають тільки одну спільну точку або паралельні. В другому випадку запропоновану вище побудову виконати не можна, через те що $AB \parallel a$ і $AB \neq a$. Розв'язування задачі зводиться до попереднього випадку, слід лише взяти довільну точку $K \notin AB$. Будуємо $K_1 = S_a(K)$ при даних $A_1 = S_a(A)$, а потім розв'язуємо задачу для точок K, K_1 і B, як і в першому випадку.

Допустимий і той варіант, коли точка B лежить на осі симетрії. Розв'язання тривіальне, $B = S_a(B)$.

Задача 6. Через дану пряму a проведіть площину, паралельну другій прямій b.

А н а л і з. Для побудови площини α, такої, щоб $a \subset \alpha$ і $b \parallel \alpha$, достатньо, щоб ця площина проходила через пряму, паралельну прямій b. Але ця ж площина повинна проходити і через дану пряму a, тобто досить побудувати $\alpha\,(a, c)$ і $c \parallel b$.

П о б у д о в а. На прямій a (рис. 45) вибираємо довільну точку A, в площині $\beta\,(A, b)$ будуємо пряму $c \parallel b$, $a \cap c = A$. Площина $\alpha\,(a, c)$ і повинна бути шуканою.

Д о в е д е н н я. $c \parallel b$ і $c \subset \alpha$, тому $a \parallel b$. Але $a \subset \alpha$.

Д о с л і д ж е н н я. Побудова залежить від взаємного розміщення прямих a і b в просторі. Можливі три випадки.

1. Прямі a і b мимобіжні $(a \div b)$. Із наведеної вище побудови випливає єдиність розв'язку. Дійсно, якою б не була $A \in a$, існує єдина пряма c, така, що $c \cap a = A$ і $c \parallel b$. Вся множина таких прямих утворює єдину площину, яка має властивості $c \subset \alpha$ і $\alpha \parallel b$.

2. $a \parallel b$. Кожна площина, яка має a, буде задовольняти умову задачі.

3. $a \cap b = A$. Задача має єдиний розв'язок: $\alpha\,(a, b)$.

4.2. Інші загальні методи розв'язування задач. Розглянуті в попередніх пунктах аналіз і синтез являються самими загальними методами розв'язування задач. Нижче викладено також загальні методи, які мають більш обмежене застосування.

Один з них — **метод вичерпних проб**, основою якого є встановлення всіх логічних можливостей і вибір із них таких, які задовольняють умові задачі. Якщо логічних можливостей, що відповідають умові задачі, скінченне число, то може виявитися можливим перебрати всі їх, виділивши ті, які цілком задовольняють умові. За допомогою цього прийому розв'язуються, зокрема, деякі елементарні задачі теоретико-числового змісту.

Приклад 1. Знайти всі чотиризначні числа, які задовольняють двом умовам: сума цифр числа дорівнює 11, саме число ділиться на 11.

Р о з в' я з а н н я. Нехай шукане число $\overline{abcd} = 10a^3 + 10a^2b + 10c + d$. Можна скласти систему рівнянь:

$$a + b + c + d = 11;$$
$$(a + c) - (b + d) = 11k.$$

Друге рівняння цієї системи виражає подільність шуканого числа на 11. Додавши почленно рівняння системи, одержимо рівняння

$$2\,(a + c) = 11\,(k + 1), \quad \text{в якому } k \in \{-1;\ 0;\ 1\}.$$

Дійсно, різниця в лівій частині другого рівняння не може бути менше -11 і більше 11 (сума цифр дорівнює 11). Застосовуємо метод вичерпних проб: $k = -1 \Rightarrow a + c = 0 \Rightarrow a = 0$, що не відповідає умові (число чотиризначне, $a \neq 0$); $k = 0 \Rightarrow 2\,(a + c) = 11$, чого не може бути: ліва частина ділиться, а права — не ділиться на 2; $k = 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow 2\,(a + c) = 22 \Rightarrow a + c = 11$, $b = 0$, $d = 0$, значення a і c знаходяться методом вичерпних проб: їх можна подати в таблиці

a	2	3	4	5	6	7	8	9
c	9	8	7	6	5	4	3	2

Методом вичерпних проб з великим успіхом можна користуватися для розв'язування багатьох логічних задач. Розвитком зазначеного прийому є деякі методи розв'язування в цілих або раціональних числах неозначених рівнянь, зокрема добре відомий метод розсіювання.

Другий метод — **це метод зведення.** Суть його полягає в тому, що над даними задачі виконують послідовні перетворення. Кінцем ланцюжка таких перетворень може бути стан, простий розгляд якого дає необхідний результат. Якщо, наприклад, треба розв'язати рівняння, то складають таку скінченну послідовність рівнянь, рівнозначних (еквівалентних) даному, останньою ланкою якої є рівняння, що має очевидний розв'язок. Так само роблять при розв'язуванні системи рівнянь, нерівностей, систем рівнянь і нерівностей. Розв'язування задач на доведення досить часто являє собою ланцюжки тотожніх перетворень, які тягнуться від лівої частини тотожностей, що доводяться, до правої, або навпаки, від лівої і правої частин до одного й того самого виразу. Безумовно, зазначене зведення треба розуміти як виведення, як скінченну послідовність, яка веде від шуканих до даних.

Цей метод найчастіше застосовують у тих випадках, коли задане відношення має властивість транзитивності. Це відношення еквівалентності (рівності, рівняння, тотожності, логічна рівносильність, паралельність) і порядку (строгі й нестрогі нерівності, включення множин, логічне слідування).

Приклад 2. Доведіть, що $x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x + 3 > 0$.

Розв'язання. Перетворимо ліву частину нерівності:

$$x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x + 3 = x^2 - 2x(y + 1) +$$
$$(y + 1)^2 - (y + 1)^2 + 2y^2 + 3 = (x - y - 1)^2 + y^2 -$$
$$-2y + 1 + 1 = (x - y - 1)^2 + (y - 1)^2 + 1 > 0.$$

За властивістю транзитивності тотожностей і нерівностей $x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x + 3 > 0$, що й треба було довести.

Метод зведення є основою розв'язування геометричних задач на побудову. В кожній задачі цього виду є вимога: виходячи з даних фігур (або даних їх елементів), за допомогою зазначених конструктивних елементів побудувати фігуру, яка б задовольняла певним умовам. Це означає, що необхідну побудову слід звести до так званих елементарних побудов, які виконуються реальними інструментами.

Метод зведення постійно застосовується при розв'язуванні текстових задач арифметичними способами. Суть справи тут полягає в тому, що дана задача зводиться до простих задач.

Розв'язування задач на доведення теорем у своїй основі теж має зведення: твердження, яке треба довести, зводиться до раніше доведених теорем і раніше введених аксіом і означень даної наукової галузі. Довести — це означає звести нову теорему (задачу), в кінці кінців, до аксіом.

Третій метод розв'язування задач має в своїй основі моделювання (математичне і предметне). Для моделювання залучаються різні математичні об'єкти: числові формули, числові таблиці, буквенні формули, функції, рівняння алгебраїчні або диференціальні та їх системи, нерівності, системи нерівностей (а також нерівностей і рівнянь), ряди, геометричні фігури, різноманітні графосхеми, діаграми Венна, графи та інш.

Математичне моделювання застосовується при розв'язуванні багатьох текстових (сюжетних) задач. Саме рівняння, складене за умовою задачі, є її алгебраїчною моделлю. Креслення фігури, що задана умовою геометричної задачі, з позначеними на ній даними й шуканими теж є геометричною моделлю задачі. Але нерідко розв'язуванню задачі допомагає і предметна її модель (наприклад, об'ємна просторова фігура, модель з використанням або зображенням предметів і об'єктів, заданих в задачі).

Приклад 3. Якщо кожен учень в класі одержить по дві цукерки, то 17 цукерок залишиться. Якщо ж роздати по три цукерки, то двом учням цукерок не дістанеться. Скільки було цукерок і скільки учнів у класі?

Цю задачу можна розв'язати, склавши систему двох лінійних рівнянь (починаючи з VII класу). Але цю саму задачу можуть розв'язати і учні початкової школи, якщо скласти предметну модель (рис. 46). На моделі видно: щоб перші учні, які мають по 2 цукерки, одержали по 3 цукерки, треба роздати 17 цукерок, що залишились, і ще 4 цукерки (двом учням цукерок не вистачило), тобто роздати додатково 21 цукерку. Отже, в класі 23 учні, а цукерок було $21 \cdot 3 = 63$.

Особливу роль в курсі математики середньої школи відіграє графічне моделювання: математичними моделями є діаграми, графіки функцій, графічні інтерпретації рівнянь, нерівностей, графи і т. д. Графічна модель досить часто дозволяє знайти шлях до розв'язання задачі.

Приклад 4. Артілі косарів треба було викосити два луги, один вдвічі більший другого. Половину дня вся артіль косила великий луг. Після полудня половина артілі залишилася на великому лузі і на вечір докосила його до кінця. Друга половина косила малий луг, на якому до вечора залишилася ділянка, що була скошена на другий день одним косарем, який працював цілий день. Скільки було косарів

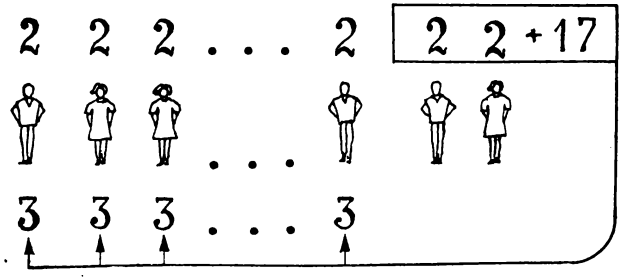


Рис. 46

в артілі? Передбачається, що полудень ділить робочий день на дві рівні частини, а продуктивність всіх косарів однакова.

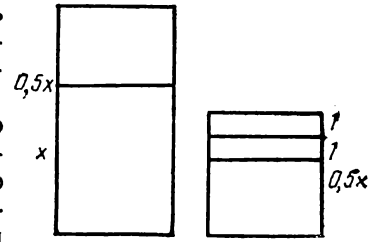


Рис. 47

Р о з в ' я з а н н я. Позначимо число косарів через x. Умову задачі зображено на діаграмі (рис. 47). За допомогою цієї діаграми можна легко скласти рівняння $0{,}5x + 2 = 0{,}5 \cdot 1{,}5x$, звідки $x = 8$. (У літературі ця задача зустрічається під назвою «Задача Л. М. Толстого».)

Велику практичну цінність мають методи **знаходження наближених значень шуканих величин.**

Всі графічні способи розв'язування задач на обчислення дають наближені розв'язки. Але такі розв'язки можна одержати і за допомогою числових методів (наприклад, при розв'язуванні квадратних рівнянь за формулами їх коренів).

В геометрії використовуються наближені методи побудови. Прикладами їх можуть бути випрямлення кола, побудова квадрата, рівновеликого даному кругові, ділення кута на рівні частини і т. д.

Такі основні способи (прийоми) розв'язування задач з курсу математики середньої школи. Залишається підкреслити, що на практиці їх часто комбінують.

Одна з основних цілей шкільного курсу математики полягає в тому, щоб забезпечити дійове засвоєння кожним учнем основних методів і прийомів розв'язування навчальних математичних задач.

4.3. Загальні поради вчителя учневі при розв'язуванні задач. Для того щоб навчитися розв'язувати задачі, треба набути відповідний досвід. Досить мало таких учнів, які самостійно набувають його, тому обов'язок учителя — допомогти учням досягти цієї мети, тобто навчити їх розв'язувати задачі. Така допомога не повинна бути надмірною, інакше вилучається сам процес набуття досвіду розв'язування задач внаслідок пасивного засвоєння матеріалу учнем. Однак і при недостатній допомозі вчителя є ризик, що учень теж не навчиться розв'язувати задачі.

Учитель повинен допомагати учневі порадами, як розв'язувати задачу, або питаннями, відповідаючи на які учень успішніше розв'яже задачу. Інколи вчитель розігрує розв'язання задачі: сам ставить питання і сам на них відповідає. Учні наслідують йому в цьому, поступово привчаючись розв'язувати задачі. Але такий спосіб навчання вимагає великої витрати часу і не завжди дає добрі результати, оскільки відбувається механічне наслідування. Потрібні питання і поради вчителя, які збуджують розумову діяльність школярів, розвивають творчий підхід до розв'язування задач.

Такі питання і поради повинні мати характер загальності для різних задач, інакше учні не навчаться розв'язуванню багатьох задач, а будуть вчитися розв'язувати кожну конкретну задачу окремо. В той же час питання і поради повинні бути природними і простими, маючи

своїм джерелом здоровий смисл. Вони повинні надавати учневі дійову, але не настирливу допомогу.

Однак одних питань і порад учителя учням недостатньо для навчання їх розв'язуванню задач. Не можна забувати, що «уміння розв'язувати задачі є мистецтво, яке здобувається практикою» [17].

Питання і поради учням можна умовно поділити на чотири групи відповідно до чотирьох етапів навчання розв'язуванню задач. Однак ці етапи не можуть бути строго ізольованими один від одного, між ними існує відповідний зв'язок, в їх єдності полягає принцип розв'язування задачі. Частіше всього питання, рекомендовані для першого етапу, стають в нагоді на другому етапі і т. д. Далі формулюються і роз'яснюються питання і поради учням, які пропонуються на кожному етапі.

Етап І. Питання і поради для засвоєння змісту задачі. Не можна переходити до розв'язування задачі, не зрозумівши чітко, в чому полягає завдання, тобто не встановивши, які дані і шукані або посилки і висновки. Перша порада вчителя: **не спішити починати розв'язувати задачу**. Ця порада не означає, що задачу треба розв'язувати якомога повільніше. Власне розв'язуванню повинна передувати підготовка, яка полягає в слідуючому: А. Спочатку слід **ознайомитися з задачею**, уважно прочитавши її зміст. При цьому схоплюється загальна ситуація, яка описана в задачі. Б. Ознайомившись з задачею, необхідно **вникнути в її зміст**. При цьому треба слідувати такій пораді: **виділити в задачі дані і шукані**, а в задачі на доведення — **посилки і висновки**.

Приклад 1. Виведіть формулу для обчислення довжини діагоналі прямокутного паралелепіпеда за відомою довжиною його ребер.

Виділимо дані і шукані. В задачі задані прямокутний паралелепіпед і довжини його ребер. Шуканою є формула для обчислення його діагоналі.

Приклад 2. Спростити вираз

$$\frac{1}{1-a^2x^2}-\frac{a^2x^2+1}{ax}\left(ax^2+a^2x^2+\frac{a^2x^2+1}{a^2x^2}\right).$$

«Зрозуміти задачу» в цьому прикладі можна тільки тоді, коли з'ясуєш порядок дій (спочатку виконуються дії в дужках, потім перетворюється добуток другого дробу і результату в дужках). Корисно до виконання перетворень встановити особливості даного виразу:

А. Якщо задача геометрична або зв'язана з геометричними фігурами, корисно **виконати креслення** до задачі, на ньому позначити дані і шукані (це теж порада, якій повинен слідувати учень).

Б. У тому випадку, коли дані (або шукані) в задачі не позначені, треба **ввести** відповідні **позначення**. В прикладі 1 треба позначити виміри паралелепіпеда: нехай a — довжина, b — ширина, c — висота паралелепіпеда. При розв'язуванні текстових задач з алгебри і початків аналізу вводять позначення шуканих або інших змінних, прийнятих за шукані.

В. Уже на першій стадії розв'язування задачі, стадії розуміння завдання, корисно спробувати дати відповідь на питання: «Чи мож-

ливо задовольнити умову?» Не завжди відразу вдається відповісти на це питання, але інколи це можна зробити. В прикладі 1 ясно, що задача має смисл, оскільки задано прямокутний паралелепіпед, значить, однозначно визначена і його діагональ; виходить, можна знайти спосіб обчислення довжини діагоналі. У прикладі 2 незрозуміло зразу, чи можна спростити цей вираз, тобто чи одержимо після перетворень вираз, який має більш простий вигляд.

Відповідаючи на питання: «Чи можна задовольнити умову задачі?», корисно з'ясувати, чи однозначно сформульована задача, чи не має вона зайвих або суперечливих даних. Одночасно з'ясовується, чи достатньо даних для розв'язування задачі.

Етап II. Складання плану розв'язування задачі. Цей процес, мабуть, є головним кроком на шляху до розв'язання задачі. Правильно складений план майже гарантує правильний розв'язок. Але складання плану може виявитися складним і довгим процесом. Тому вкрай необхідно пропонувати учням ненав'язливі питання, поради, які б допомогли їм краще й швидше скласти план розв'язування задачі, тобто «відкрити» ідею її розв'язування:

А. Чи знайома тому, хто розв'язує, яка-небудь *споріднена або аналогічна* задача? Якщо така або споріднена задача відома, то складання плану її розв'язування не викличе труднощів. Так, на прикладі 1, розглянутому вище, спорідненою є задача про діагональ прямокутника.

Однак не завжди відома задача, споріднена тій, яку розв'язують. У цьому випадку може допомогти в складанні плану така порада.

Б. Подумайте, чи відома вам *задача, до якої можна звести ту, яку розв'язуєте?* Якщо така задача відома, то шлях складання плану розв'язування даної задачі очевидний: звести дану задачу до раніше розв'язаної. Так, у прикладі 1 задача зводиться до знаходження гіпотенузи прямокутного трикутника (рис. 48).

В. Може виявитися, що споріднена задача невідома тому, хто її розв'язує, і він не може звести дану задачу до якої-небудь відомої. План відразу ж скласти не вдається. Слід скористатися порадою: **«Спробуйте сформулювати задачу інакше».** Другими словами, спробуйте перефразувати задачу, не змінюючи її математичного змісту.

Приклад 3. Доведіть, що для будь-яких натуральних значень n вираз $n^2 - n$ має парне числове значення.

Якщо формулювання задачі не показує шляху до розв'язування, можна переформулювати задачу: «Доведіть, що вираз можна розкласти на множники, з яких принаймні один (при натуральних числових значеннях n) ділиться на два».

При переформулюванні задачі користуються або означеннями даних в ній математичних понять (терміни заміняють їх означеннями), або їх ознаками (точніше — достатніми умовами). Треба відмітити, що здібність учня переформулювати текст задачі є показником розуміння математичного змісту задачі.

Деякі автори вважають переформулюванням задачі і переклад її на мову математики, тобто мову алгебри, геометрії або аналізу. Це, скоріше, формалізація задачі, її «математизація». До такого ж при-

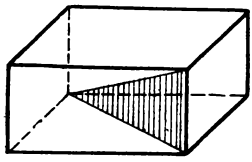


Рис. 48

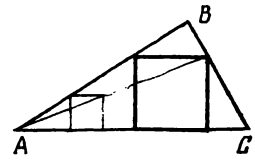


Рис. 49

йому доводиться часто вдаватися при розв'язуванні багатьох текстових задач.

Г. Складаючи план розв'язування задачі, завжди слід задавати собі (або учневі, який розв'язує задачу) питання: **«Чи всі дані задачі використано?»** Встановлення неврахованих даних задачі полегшує складання плану її розв'язування.

Д. При складанні плану розв'язування задачі іноді буває корисно дотримуватися поради: **«Спробуйте перетворити шукані або дані».** Таке перетворення часто сприяє швидшому складанню плану її розв'язування. При цьому шукані перетворюють так, щоб вони наблизились до даних, а дані — до шуканих. Так, у кожному випадку тотожних перетворень дані перетворюються, поступово наближаючись до результату (шуканого). Аналогічно рівняння, систему рівнянь, нерівність або систему нерівностей перетворюють в рівнозначне, щоб знайти їх корені або множину розв'язків.

Е. Нерідко дотримуючись вищенаведених порад, учень все ж не може скласти план розв'язування задачі. Тоді може допомогти ще одна порада: **«Спробуйте розв'язати лише частину задачі»,** тобто спробуйте спочатку задовольнити лише частині умов, з тим щоб далі шукати спосіб задовольнити умовам задачі, які залишилися.

Приклад 4. У даний трикутник впишіть квадрат так, щоб дві вершини його лежали по одній на двох сторонах трикутника, а дві інші вершини квадрата лежали на третій стороні трикутника.

Спробуємо задовольнити спочатку частині умови задачі: побудуємо трикутник і впишемо в нього квадрат так, щоб дві його вершини лежали на одній стороні трикутника, а третя — на другій (рис. 49). Таких квадратів можна побудувати нескінченно багато. Очевидно, що всі ці квадрати будуть гомотетичні з центром гомотетії у вершині A трикутника (у вибраному нами варіанті). Отже, четверта вершина повинна лежати на перетині прямої, яка проходить через точку A і вершину побудованого квадрата, і сторони даного трикутника. План розв'язування задачі очевидний.

Пораду **«Спробуйте розв'язати лише частину задачі»** можна розширити до поради: «Розбийте задачу на більш прості задачі». Так діють при розв'язуванні текстових задач арифметичним способом «за питаннями» (відповідь на кожне поставлене питання розв'язує фактично одну просту задачу), деяких конструктивних задач геометрії, задачі на складання систем рівнянь і нерівностей (при складанні кожного рівняння або нерівності фактично розв'язують одну з більш простих задач, на які розчленовується дана задача).

Часто при складанні плану розв'язування задачі допомагає відповідь на питання: «Для якого окремого випадку можна досить швидко розв'язати задачу?» Знайшовши такий частковий випадок, той, хто розв'язує задачу, ставить перед собою нову мету — скористатися розв'язанням задачі в знайденому частковому випадку для більш загального (але, може бути, не самого загального) випадку. Так можна робити, поступово узагальнюючи задачу до початкової (вихідної) задачі, яку треба розв'язати. Передбачений варіант міркувань — пряме застосування повної індукції. Отже, порада: розгляньте часткові випадки ситуації, створеної умовою задачі, розв'яжіть задачу для якого-небудь окремого випадку, застосуйте індуктивні міркування.

Приклад 5. Доведіть, що сума віддалей від кожної внутрішньої точки M правильного трикутника до його сторін стала.

На рис. 50 подана схема міркувань за індукцією. Найпростіший частковий випадок, при якому задача розв'язується тривіально, той, коли точка M є вершиною трикутника: віддалі від двох сторін дорівнюють 0 (рис. 50, *а*). Більш загальний випадок: точка M лежить на одній із сторін (рис. 50, *б*). Провівши $MN \parallel AC$, одержим допоміжний рівносторонній $\triangle MNB$, в якому M — вершина. Розв'язання зрозуміле з креслення. І останній випадок: точка M — довільна точка всередині $\triangle ABC$ (рис. 50, *в*). Провівши через точку $MA'C' \parallel AC$, зведем задачу до попереднього випадку. План розв'язування очевидний.

Етап III. Реалізація плану розв'язування задачі. План є лише загальним контуром розв'язування задачі. При реалізації плану той, хто розв'язує задачу, розглядає всі деталі, які вписуються в цей контур, докладаючи при цьому старанності і терпіння. Але при цьому учень, який розв'язує задачу, повинен дотримуватися таких порад:

А. Перевіряйте кожний свій крок, доки не переконаєтесь, що його виконано правильно. Інакше треба доводити правильність кожного кроку посиланням на відповідні, раніш відомі математичні факти, твердження.

Б. При реалізації плану допоможе порада: **замініть терміни і символи їх означеннями.** Так, термін «паралелограм» замінюється його означенням: «Чотирикутник, у якого протилежні сторони попарно паралельні», термін «границя числової послідовності» для доведення, наприклад, того твердження, що границя суми двох послідовностей, які мають границі, дорівнює сумі границь цих послідовностей, можна замінити, і цілком успішно, його означенням.

В. При розв'язуванні деяких задач допомагає порада: **скористайтеся властивостями даних в умові об'єктів.**

Приклад 6. Доведіть, що в паралелограмі протилежні кути рівні.

При розв'язуванні можна виходити з означення паралелограма (друга порада), а можна скористатися однією з його властивостей, наприклад, паралельністю і рівністю двох протилежних сторін (третя порада).

Етап IV. Аналіз і перевірка правильності розв'язання задачі. Навіть добре встигаючі учні, одержавши відповідь і ретельно виклавши хід розв'язання, вважають задачу розв'язаною. Але ж одержання результату не означає, що задача розв'язана правильно. Тим більше не означає, що для розв'язування обрано кращий, найбільш вдалий, витончений варіант. За В. М. Брадісом [3], задачу можна вважати розв'язаною, коли знайдено розв'язок: безпомилковий, обгрунтований, вичерпаний. Тому аналіз розв'язання задачі, перевірка розв'язку і достовірності результату повинні бути етапом розв'язування задачі.

Отже, дві поради: перевірте результат, перевірте хід розв'язання.

Перевірку результату можна виконати різними способами. Так, перевіряючи правильність ходу розв'язування, переконуємося і в достовірності результату. Значить, треба виконати таку пораду: перевірте всі вузлові пункти розв'язування, ще раз переконайтесь в істинності здійснених міркувань. Другий спосіб полягає в одержанні того самого результату застосуванням іншого методу розв'язування задачі. В зв'язку з цим корисно завжди ставити питання тому, хто розв'язує задачу: «Чи не можна той самий результат одержати інакше?» Іншими словами, варто наслідувати пораді: розв'яжіть задачу іншим способом. До того ж одержання різних варіантів розв'язання однієї й тієї самої задачі має важливе пізнавальне значення.

Перелічені поради дають можливість розв'язувати задачі різних типів, але, зрозуміло, не можуть бути рецептом відносно будь-якої задачі. Ці поради, багато яких сформулював Д. Пойа [17], правильно орієнтують того, хто розв'язує задачу, на пошук розв'язання, скорочують час розв'язування задач, підвищують імовірність знаходження правильного і раціонального способу розв'язування задач. Єдиного ж рецепту для розв'язування будь-яких задач просто не існує.

Від загальних порад до часткових. Починати треба з загальних питань, порад, тобто саме з тих, які були перелічені вище. Може статися, що загальні питання не допоможуть якомусь учневі. Тоді треба скористатися додатковими, більш частковими питаннями, так, щоб дійти до питань, які відповідають рівню розвитку і математичної підготовки учня. Переходити до часткових, конкретних питань треба поступово, щоб на долю учня дісталась найбільша частина роботи при розв'язуванні задачі.

Часткові питання повинні бути такими, щоб вони спрямовували думку учня в потрібному напрямку, заставляючи його активно мислити над розв'язуванням задачі. Зрозуміло, пропонуючи питання учням, треба дати час для підготовки відповіді на кожне з них.

Приклад застосування рекомендованих порад і питань при розв'язуванні задач.

Задача. Три пункти A, B, C з'єднані прямолінійними дорогами. До відрізка дороги AB прилягає квадратне поле з стороною, довжина якої дорівнює половині довжини AB; до відрізка дороги BC прилягає квадратне поле, довжина сторони якого дорівнює BC; а до відрізка дороги AC прилягає прямокутна ділянка лісу довжиною, що дорівнює

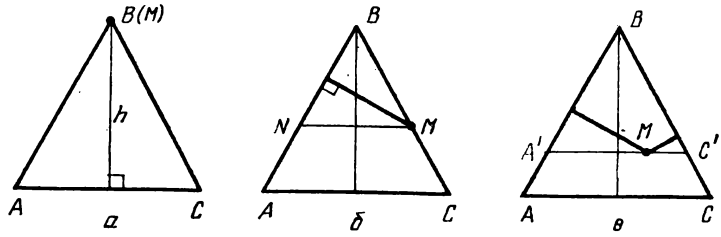


Рис. 50

AC, і шириною 4 км. Площа лісу на 20 км^2 більша суми площ квадратних полів. Знайти площу лісу.

Засвоєння змісту задачі. 1. Ознайомившись з задачею, починаємо роботу над засвоєнням її змісту.

2. Виділимо дані: задані пункти A, B, C, поля площею $(0{,}5\ AB)^2$ і BC^2, ліс, площа якого $4 \cdot AC$. Відомо, що площа лісу на 20 км^2 більша суми площ полів.

Шуканою є площа лісу, точніше, його довжина AC.

3. Доцільно виконати креслення (рис. 51).

4. Введемо позначення: $AB = x$, $BC = y$, $AC = z$.

Останнє можна вважати кінцем роботи по засвоєнню змісту задачі і початком складання плану розв'язування задачі.

Складання плану розв'язування задачі. Ми вже встановили частину зв'язків між даними і шуканими. Тепер цей зв'язок можна записати у вигляді рівняння

$$4z = \frac{x^2}{4} + y^2 + 20. \qquad (1)$$

Якщо подібні задачі раніше не розв'язувалися (немає можливості прийняти першу пораду), треба спробувати звести задачу до раніше розв'язаних (виконати другу пораду). Але пам'ять не може швидко підказати задачу, до якої можна було б звести дану задачу. Залишається одне: спробувати звести розв'язування задачі до розв'язування рівняння (1).

На перший погляд, рівняння (1) здається неозначеним (дійсно, воно має три змінних), а задача — не має розв'язку. Однак не треба поспішати з висновками. Скористаємось четвертою порадою і задамо собі питання: «Чи всі дані задачі використано?» Інакше: «Чи не має умова задачі неявно заданих зв'язків між шуканими і даними?»

Уважне дослідження умови («Розпізнати ... об'єкти, які допоможуть розв'язуванню задачі») дозволяє встановити ще зв'язки між даними і шуканими: x, y, z — довжини сторін трикутника ABC, вони задовольняють аксіомі трикутника. Тому

$$\begin{cases} 4z = \frac{x^2}{4} + y^2 + 20; \\ x + y \geqslant z, \text{ або } x + y \geqslant \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} + 5. \end{cases} \qquad (2)$$

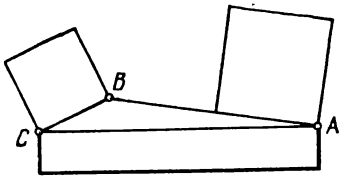


Рис. 51

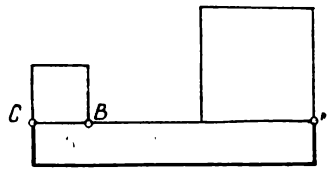


Рис. 52

Уважне і вдумливе вивчення цієї нерівності дозволяє «розпізнати» приховані в ній квадрати двочленів. Таким чином, план розв'язування складено.

Реалізація плану. Перенесемо всі змінні в одну (праву) частину нерівності і одержимо недодатній многочлен. Але

$$\frac{x^2}{16} - x + \frac{y^2}{4} - y + 5 = \frac{x^2}{16} - 2 \cdot \frac{x}{4} \cdot 2 + 4 + \frac{y^2}{4} - 2 \cdot \frac{y}{2} \cdot 1 + 1 =$$
$$= \left(\frac{x}{4} - 2\right)^2 + \left(\frac{y}{2} - 1\right)^2.$$

Через те що сума квадратів не може бути від'ємною, одержимо рівносильне системі (2) рівняння

$$\left(\frac{x}{4} - 2\right)^2 + \left(\frac{y}{2} - 1\right)^2 = 0,$$

звідки $\frac{x}{4} - 2 = 0$ і $\frac{y}{2} - 1 = 0$, або $x = 8$ і $y = 2$. Але тоді $z = 10$ з рівняння (1), а площа лісу $4 \cdot 10 = 40$ (км^2).

Перевірка розв'язку. 1. Підстановкою в рівняння (1) переконуємося, що знайдені значення x, y, z є його розв'язком.

2. Можна обчислити площі заданих в умові квадратних полів і порівняти їх з площею лісу: $(0{,}5 \cdot AB)^2 = 16$ (км^2), $BC^2 = 4$ (км^2), $4 \cdot AC = 20 = (0{,}5 \cdot AB^2) + BC^2$. Останнє відповідає умові задачі.

3. Залишається встановити геометричний смисл результату. Оскільки x, y, z — довжини сторін трикутника і $x + y = z$, цей трикутник вироджується у відрізок прямої, тобто точки (пункти) A,B, C лежать на одній прямій. Геометрична ілюстрація умови задачі на відміну від рис. 51 повинна бути такою, як це подано на рис. 52. На початковому етапі розв'язування задачі ми не мали можливості виконати таке креслення через те, що справжній зв'язок змінних x, y, z виявили лише в процесі розв'язування задачі.

§ 5. ОРГАНІЗАЦІЯ НАВЧАННЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЮ МАТЕМАТИЧНИХ ЗАДАЧ

5.1. Фронтальне розв'язування задач. Фронтальне розв'язування задач — це розв'язування однієї і тієї ж задачі всіма учнями класу в один і той же час. Організація фронтального розв'язування задач може бути різною.

Усне фронтальне розв'язування задач найбільш поширено в V—VIII класах, дещо рідше в IX—XI класах. Це перш за все вправи для усного обчислення, тотожних перетворень і задачі-питання, істинність відповідей на які стверджується усним доведенням (див. 2.1). Зараз учителі математики V—VIII класів майже на кожному уроці проводять «п'ятихвилинки» усних вправ. На жаль, часто цим і обмежується виконання усних вправ. А слід відмітити, що одним із завдань навчання математики є навчання швидко виконувати усні обчислення. Виконання цього завдання слід добиватися на кожному етапі навчання. Тому, де це можливо (а не тільки на «п'ятихвилинках» усного рахунку), обчислення слід виконувати усно. Якщо учні навчаться усно виконувати обчислення і нескладні перетворення, то на уроках математики, фізики, хімії звільняється помітна кількість часу, який тепер витрачається на нераціональне виконання обчислень і викладок.

Організовуючи усні фронтальні вправи, треба мати на увазі, що використання табличок, таблиць, кодоскопа та інших засобів зображення для учнів значно скорочує час виконання усних вправ і пожвавлює урок математики.

Таблички виготовляє вчитель або окремі учні за його дорученням. На рис. 53 наводяться приклади табличок, на яких записані завдання для усних обчислень під час вивчення множення дробових і цілих чисел (зручні розміри табличок 300 × 150 мм).

Таблиці для усних вправ мають різну форму і застосовуються неодноразово з різними завданнями. Подану на рис. 54 таблицю можна використати для організації усних вправ при вивченні дій над раціональними числами, для закріплення понять про обернені і протилежні числа.

Зображення таблички і таблиці можна виконати на плівку, а потім спроектувати її на екран або класну дошку за допомогою кодоскопа. Виготовлення табличок і таблиць складніше, ніж транспарантів (кодопозитивів), а результати використання практично однакові.

Письмове розв'язування задач із записом на класній дошці. В практиці навчання немало таких ситуацій, коли зручніше, щоб одну й ту саму задачу розв'язували всі учні класу одночасно з розв'язуванням цієї ж задачі на дошці. При цьому задачу на дошці може розв'язувати або вчитель, або учень за вказівкою вчителя. Найчастіше такий спосіб застосовують в слідуючих випадках: а) при розв'язуванні перших після показу вчителем задач, спрямованих на ознайомлення учнів з новими поняттями і методами; б) при розв'язуванні задач, самостійно з якими можуть справитися не всі учні класу; в) при вивченні різних варіантів розв'язування однієї і тієї ж задачі — для порівняння і вибору кращого варіанту; г) під час аналізу помилок, що їх допустили

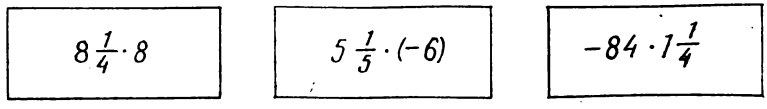


Рис. 53

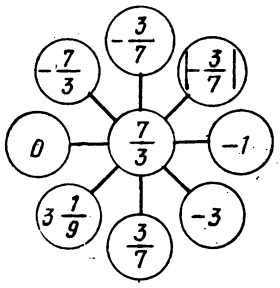


Рис. 54

деякі учні класу, самостійно розв'язуючи задачі, і т. д. У всіх цих випадках корисні колективне розв'язування або колективний аналіз розв'язування задачі.

Розглянемо докладно, як можна провести порівняння різних варіантів розв'язування задачі. Вчитель може під час фронтального усного аналізу умови задачі намітити разом з учнями декілька варіантів розв'язування задачі. Деякі з них як нераціональні можна відкинути. Збережені варіанти для кращого вивчення, осмислення, оцінки й порівняння доцільно записати на дошці. З цією метою можна зразу викликати двох-трьох учнів до дошки для одночасного розв'язування задачі різними способами. Але треба враховувати, що керівництво розв'язуванням задачі в цьому випадку вимагає деякої майстерності від учителя: необхідно правильно розподілити свою увагу між учнями, які розв'язують задачу коло дошки, і останніми учнями класу. Слід також передбачити, щоб увага учнів класу, що розв'язують задачу, не розпорошувалась діями учнів коло дошки. Можна варіанти розв'язування відтворити на дошці по черзі, але це займає багато часу. Для прискорення роботи вчитель може сам виконати на дошці необхідні записи деяких варіантів розв'язань. Можливо також використати кодоскоп, за допомогою якого можна відтворити заготовлені раніше записи інших розв'язань задачі.

Письмове самостійне розв'язування задач — найбільш ефективне, тому що учні навчаються творчо мислити, самостійно розбиратися в різних питаннях теорії і застосувань математики. Самостійне розв'язування учнями задач на уроках математики має значні переваги. По-перше, воно помітно підвищує навчальну активність учнів, пробуджує в них інтерес до розв'язування задач, стимулює творчу ініціативу. Таким чином, підвищується ефективність уроку. Самостійне розв'язування задач розвиває розумову діяльність учнів, а в цьому й полягає одно з основних призначень задач і вправ на уроках математики.

По-друге, не маючи можливості копіювати розв'язання задачі з дошки, учень змушений самостійно розібратися в її розв'язку, а тому й краще готуватися до уроків математики.

По-третє, нерідко скорочується час, необхідний для опитування учнів на уроках математики, оскільки оцінювати успіхи учнів у деяких випадках можна і за підсумками самостійного розв'язування задач.

По-четверте, вчитель одержує можливість спрямовувати індивідуальну роботу учнів, попереджувати помилки, вказувати шляхи їх виправлення.

Допустимі різні форми організації самостійного розв'язування учнями задач, наприклад така: учитель підбирає задачі; в процесі роботи допомагає деяким учням порадою, як краще розв'язати ці задачі; іншим радить звернутися до підручника; сильніші учні справ-

ляються без допомоги вчителя. За роботою всіх учнів учитель весь час спостерігає, відмічаючи, кому з них і в чому саме він допоміг. Потім самостійна робота перевіряється і оцінюється з урахуванням рівня самостійності учня. При такій організації самостійної роботи здійснюється і навчання, і контроль знань з того чи іншого розділу математики, який вивчається.

Частіше всього вчитель заздалегідь визначає цілі самостійних робіт: формування нових знань, умінь і навичок (тобто виконуються навчаючі функції); закріплення вивченого і тренування в застосуванні теоретичних положень; перевірка рівня підготовленості учнів з вивчених питань. При виконанні навчаючої самостійної роботи з розв'язування математичних задач учитель може надати допомогу окремим учням або запропонувати самостійне розв'язування задачі після попереднього її аналізу і складання плану розв'язування.

Існують і такі форми самостійних навчаючих робіт з математики, при виконанні яких учні самостійно вивчають невеликий теоретичний матеріал, розглядають приклади розв'язання задач, запропоновані вчителем, самостійно розв'язують аналогічні задачі.

Перед початком самостійних робіт учнів з розв'язування математичних задач корисно провести інструктаж відносно змісту, порядку, термінів виконання завдання і ін. Після перевірки правильності самостійних розв'язань бажано проаналізувати з учнями одержані результати. Це можна зробити на наступних уроках або під час консультації.

Коментування розв'язування математичних задач полягає в тому, що всі учні самостійно розв'язують одну й ту саму задачу, а один із них послідовно пояснює (коментує) розв'язання. Деякі вчителі перетворюють коментування в запис під диктовку, що, зрозуміло, не дає належної користі.

Коментування означає пояснення, тлумачення чого-небудь, тобто учень-коментар пояснює, на якій основі він виконує те чи інше перетворення, те чи інше міркування, побудову. При цьому кожний крок в розв'язанні задачі повинен бути виправданим посиланням на відомі математичні твердження.

Приклад. Довести, що сума трьох послідовних натуральних чисел не може бути простим числом.

Позначимо перше з цих чисел буквою n. Тоді два наступні за ним числа запишемо $n + 1$, $n + 2$, оскільки друге на 1, а третє на 2 більше першого числа. Запишемо суму цих трьох чисел і перетворим її. Спочатку розкриємо дужки, застосовуючи сполучний закон додавання. Потім зводимо подібні члени. Виносимо спільний множник (за розподільним законом) і одержуємо результат. Цей вираз є добуток двох множників: 3 і $n + 1$; тому він не може бути простим числом ні при яких натуральних числах n.

Таке коментування, безумовно, корисне при розв'язуванні задач. Учні, навіть недостатньо підготовлені з математики, почувши пояснення наступного кроку в задачі, намагаються виконати його самостійно. Справді, таке пояснення вимагає від учнів не тільки формального розв'язування задачі, але, що дуже важливо, і розуміння суті перетворення,

яке виконується, активної роботи думки. А цього й слід прагнути при розв'язуванні задач.

5.2. Індивідуальне розв'язування задач. Необхідність індивідуального підходу при організації навчання розв'язуванню задач. Фронтальне розв'язування навчальних задач не завжди приводить до бажаних результатів у навчанні математики. При фронтальній роботі всі учні класу розв'язують одну й ту саму задачу. Для одних учнів вона може виявитися досить легкою, для інших навпаки, викличе помітні труднощі. Тому при індивідуальному доборі задач необхідно, з одного боку, враховувати здібності кожного учня, з другого — сприяти розвитку здібностей.

Таким чином, завдання вчителя полягає в тому, щоб визначити рівень підготовки, можливостей і здібностей до вивчення математики кожного учня класу і у відповідності до цього організувати розв'язування задач. В свою чергу, такий підхід до організації навчання дає можливість оволодіти необхідними вміннями і навичками слабо встигаючим учням і в значній мірі удосконалюватися більш сильним.

Індивідуалізація самостійних робіт учнів з розв'язування задач. В умовах, коли всі учні самостійно розв'язують одну й ту саму задачу, вчитель може враховувати індивідуальні особливості кожного з них тільки в процесі надання допомоги учням і під час перевірки виконаної ними роботи. Для більш повного врахування здібностей і математичної підготовки учнів, використання їх можливостей необхідно пропонувати для самостійного розв'язування не однакові, а різні задачі, добираючи їх для груп учнів з приблизно однаковим рівнем успішності з математики. З цією метою доцільно використати «Дидактичні матеріали з алгебри», «Дидактичні матеріали з геометрії» для різних класів (див. § 7.2). При такій організації навчання слабкі (в успішності) учні, розв'язавши самостійно або за допомогою вчителя найпростіші задачі, набувають віри в свої сили. Добре встигаючі учні мають можливість удосконалювати свої здібності і пізнання з математики.

Зрозуміло, набір індивідуальних завдань має на меті для кожної вибраної вчителем групи учнів скласти систему задач. Бажано, щоб учні не знали про те, кого з них в яку групу зарахував учитель. Ці групи повинні утворювати сталий склад: в міру оволодіння необхідними знаннями учні «переводяться» з групи для менш підготовлених в іншу — для більш підготовлених.

Індивідуалізація самостійних робіт учнів по ліквідації прогалин у знаннях математики. Виключного значення набувають самостійні роботи учнів, які спрямовані на ліквідацію прогалин у знаннях математики. Такі прогалини можна виявити за допомогою перевірочних і контрольних робіт, а також під час розв'язування задач на уроці або вдома. Учитель вказує в зошиті на допущені помилки: сильним учням досить підкреслити неправильний результат, а помилку вони знайдуть самі, а недостатньо підготовленим помилки слід виправити. В зошитах необхідно вказати розділи підручника, матеріали якого учень повинен відтворити

в своїй пам'яті, виписати задачі (можна вказати номери задач із збірників або підручників), які учень повинен розв'язати, щоб заповнити відповідні прогалини в знаннях і вміннях. Звичайно, задачі підбирає вчитель, враховуючи причини, які викликали ті чи інші помилки. Інколи одна й та ж помилка допускається з різних причин, і ліквідувати треба не помилку, а причину, яка її викликала. Така організація розв'язування задач, зв'язаних з ліквідацією прогалин в знаннях школярів, приносить більшу користь, ніж фронтальна робота над помилками. При цьому враховуються індивідуальні особливості учнів і характер матеріалу, що вивчається.

Домашнє розв'язування задач учнями. Зміст задач і вправ, що призначаються для домашньої роботи учнів слід попередньо проаналізувати на уроці. Це не означає, що треба задавати тільки задачі, аналогічні розв'язаним у класі. Такі домашні завдання мало ефективні. Розв'язуючи домашні задачі «як у класі», учні в кращому випадку звертаються до аналогії, і, як правило, спочатку розв'язують задачі (виконують письмове завдання), а потім читають підручник з математики. Але ж порядок тут повинен бути інший: спочатку повторення теоретичних положень за підручником, а потім — розв'язування задач.

Домашнє завдання має на меті не тільки повторення вивченого на уроці, а й подальше удосконалення математичних знань, умінь і навичок. З урахуванням таких цілей його і треба складати. Учитель дає необхідні вказівки щодо розв'язування домашніх задач, однак не виключає труднощі, які повинен подолати учень в процесі виконання завдання. Учні, самостійно розв'язуючи задачі дома, повинні проявити ініціативу, кмітливість і наполегливість, мобілізувати свої знання. Такі домашні завдання доцільно пов'язувати з поглибленням і уточненням вивченого, з відкриттям якихось нових його сторін.

Оскільки учні мають різну підготовку з математики, слід індивідуалізувати домашні завдання з урахуванням багатьох факторів: учні повинні ліквідувати прогалини в знаннях, закріпити засвоєні на уроці знання, удосконалити їх. За допомогою індивідуальних домашніх завдань (паралельно з роботою на уроці) можна виявляти нахили окремих учнів, виховувати в них захоплення математикою. Посильні ж завдання для слабких і відстаючих учнів допоможуть їм подолати багато труднощів у навчанні розв'язуванню задач. Треба зазначити, що з особливим бажанням учні розв'язують задачі, запропоновані кожному окремо. Такі завдання можна заготовити на окремих картках.

5.3. Заключний етап в розв'язуванні навчальної математичної задачі. Мета навчальних задач — не одержання відповіді, а опанування процесу її знаходження, переробки вхідної інформації у вихідну. Відповідь особливо істотна для задач, які людині доводиться розв'язувати в практичній діяльності, для навчальної ж задачі на першому місці стоять пошуки розв'язування, здійснення його і пізнавальні висновки з виконаної роботи. Ось тому необхідний заключний етап роботи над навчальною задачею.

Основним його змістом повинно бути осмислення виконаного розв'язання, формулювання і розв'язування інших задач, якщо це можливо, пов'язаних з першою, породжуваних нею, і здобування з усієї виконаної роботи висновків про те, як знаходяться і виконуються розв'язки. Схема цього етапу роботи з навчальною задачею зображена на рис. 55.

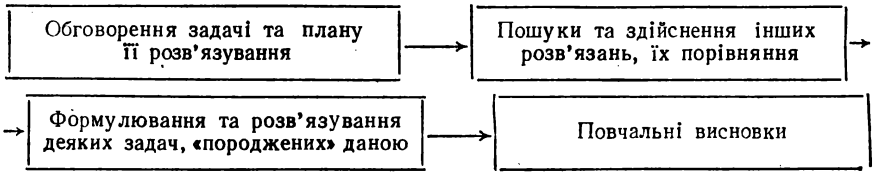


Рис. 55

1. Необхідність **обговорення задачі і способів її розв'язання** випливає з основного призначення навчальних математичних задач. Під час обговорення слід зупинитися на таких питаннях:

А. Більш повне використання задачі. При розв'язуванні багатьох задач треба намагатися достатньо повно використати вхідну інформацію, яку вони мають. Практично це означає, що за однією і тією ж умовою корисно розв'язувати не одну, а кілька задач, мета яких — одержати різні результати. Значить, більшість задач повинні явно мати декілька питань. В противному випадку доцільно ставити додаткові питання: «Що можна ще взнати з умови задачі?»

Приклад 1. Посудина з 2,5 л деякої рідини має масу 2,8 кг. Та сама посудина з 3,5 л рідини має масу 3,6 кг. Знайдіть масу порожньої посудини (розв'яжіть графічно).

З умови задачі можна здобути значно більше інформації, ніж з її висновку. Наприклад, узнати: густину рідини; масу посудини на 2; 3 л і т. д. тієї самої рідини; об'єм рідини, що міститься в посудині, при заданій масі посудини з рідиною й ін. Якщо доповнити умову задачі, можна поставити й інші питання: Яку масу (або об'єм) даної рідини може вмістити ця посудина? Яка маса посудини, вщерть наповненої рідиною?

Можна зробити висновок, що в методичному відношенні більш корисні задачі, які допускають постановку багатьох питань. Такі задачі розвивають грунтовність мислення; привчають учнів встановлювати многосторонні зв'язки в тих ситуаціях, які розглядаються; сприяють економніше використовувати час, який відводиться для розв'язування задач на уроках математики. Адже на засвоєння змісту задачі при цьому витрачається значно менше часу, ніж при розв'язуванні декількох різних за умовою однотипних задач.

Б. Обговорення роботи з пошуку розв'язку. Основна трудність при розв'язуванні математичної задачі полягає в знаходженні розв'язку, а не в здійсненні його. Тому виявляється необхідним встановлення ідеї (головної думки), яка прийнята за основу розв'язування задачі: як виникла ця ідея, що допомогло знайти розв'язок? Інакше кажучи, потребує обговорення підхід до розв'язування задачі, пошук розв'язку.

Перш за все шукають провідну ідею (принцип), з якого слід виходити. Якщо таку ідею знайдено, подальше розв'язування являє собою конкретизацію цієї ідеї. Але може трапитися так, що знайдена ідея не забезпечує досягнення мети. Тоді шукають інші ідеї, придатні для даної задачі, і випробовують їх. Ось ці пошуки і відбір ідей, напевне, і складають основну трудність розв'язування. Тому слід врахувати і використати фактори, які допомагають цим пошукам, і подолати фактори, які їм заважають.

Щоб мати можливість обрати ідею, треба мати достатній запас таких ідей, який створюється практикою розв'язування задач (при обговоренні розв'язків). Успішні дії при розв'язуванні підкріплюються, і здобута цінна інформація фіксується в тривалій пам'яті. Так накопичується досвід розв'язування задач.

Треба вчити школярів користуватися запасом провідних ідей відносно задач різноманітних типів, учити вибирати і застосовувати потрібну ідею. Багато з таких ідей висловлено в § 4.3 як порад і запитань, тому, хто розв'язує задачу. Корисно також звернути увагу учнів на інші ідеї, що приводять до вдалого розв'язання задачі.

В. Встановлення зв'язків з раніш розв'язаними задачами. При розв'язуванні математичних задач (див. § 4.3) часто використовуються методи і результати розв'язування попередніх задач. Саме тому корисно встановити зв'язки між задачами, що розв'язуються, з раніш виконаними. Крім того, при цьому учні виявляють спільні і різні риси задач, краще усвідомлюють ідею розв'язування даної задачі, глибше пізнають метод розв'язування класу споріднених задач і таким чином готуються до роботи з наступними задачами.

2. Друга частина заключного етапу розв'язування задач — **пошуки і здійснення нових способів розв'язування, їх порівняння і вибір кращого варіанту.** Про це вже говорилося в цьому ж розділі (див. п. 2.2) Варто відмітити, що більш ефективного способу для виховання гнучкості математичного мислення і винахідливості (дотепності), ніж спосіб пошуку різних розв'язань задач, мабуть, немає.

3. Третя основна частина — **формулювання і розв'язування інших задач, «породжених» розглянутою.** Ми маємо тут узагальнення і спеціалізацію вихідної задачі, а також здобуття інших задач з даної внаслідок часткової зміни її умови.

Це можуть бути задачі, в яких частина даних вихідної задачі приймається за шукане, а деякі шукані вважаються даними; задачі, які дістали заміною одних об'єктів іншими (без зміни шуканих) і т. д. Так виникають задачі, обернені даним, суперпозиції задач, серії задач з різними даними, що приводять до одного результату, і т. п. Цю частину заключного етапу можна назвати розвитком теми задачі. Важко переоцінити її значення для розвитку пізнавальних здібностей, виховання математичного мислення і формування особистості учня.

Розвиток теми задачі дуже корисний і в практичному відношенні, оскільки зміни, узагальнення і спеціалізації задач виховують творче ставлення до тих проблем, які ставить життя, роблять мислення ініціативним і оперативним. У методичному відношенні розвиток теми

задачі особливо цінний тим, що привчає учнів до переконструювання задач, а це, як відомо, основний прийом пошуку розв'язків.

Приклад 2. Не змінюючи основи, перетворіть даний паралелограм у рівновеликий йому паралелограм.

Цю задачу можна спеціалізувати, наприклад, так: а) дано паралелограм, побудуйте ромб, рівновеликий даному паралелограму, і такий, що його сторона є основою цього паралелограма; б) побудуйте прямокутник, рівновеликий даному паралелограму з тією самою основою.

Приклад 3. Периметр прямокутника $2p$. Яким повинен бути цей прямокутник, щоб площа його була найбільшою?

Перетвореною задачею по відношенню до даної буде така: Площа прямокутника S. Яким повинен бути прямокутник, щоб периметр його був найменшим?

Приклад 4. Відновіть рівнобедрений трикутник за однією з його вершин і основами двох висот. Ця задача допускає такі зміни:

а) відновіть рівнобедрений трикутник за двома його вершинами і основою однієї з висот; б) відновіть рівнобедрений трикутник за основами двох висот, які лежать на його бічних сторонах, і двома відмінними від вершин точками основи трикутника; в) відновіть рівнобедрений трикутник за основами трьох його висот; г) відновіть трикутник за основами трьох його висот.

Зміна цієї задачі приводить до узагальнення і задачі, і методу її розв'язування.

Приклад 5. Обчисліть $\int_0^a (2 - 4x + 3x^2)\,dx$.

Розвиток теми задачі можна пов'язати з її удосконаленням:

а) спростіть первісну $\int_0^a (2 - 4x + 3x^2)\,dx$;

б) знайдіть множину значень a, при яких $\int_0^a (2 - 4x + 3x^2)\,dx \leqslant a$.

Розвиток теми задачі як заключний етап роботи з нею особливо цінний при творчому підході вчителя до навчання розв'язуванню задач.

4. Четверта частина заключного етапу по відношенню до задач з яскраво вираженими особливостями — це **повчальні висновки (фіксації) з проведеної роботи про те, як** в подібних випадках **знаходять і здійснюють розв'язування, а також які особливості задач підказують спосіб (прийом) розв'язування.**

До цієї частини слід віднести систематизацію різних можливих підходів до задач певного змісту. В процесі роботи над розв'язуванням серії пов'язаних між собою задач наступає момент, коли виявляється дуже корисним підвести підсумки проведеної роботи, систематизувати способи розв'язування, повніше виявити можливості для здійснення розв'язків задач даного типу і споріднених з ними. Сказане пояснимо на конкретних прикладах.

Приклад 6. В задачах на арифметичну прогресію доводиться мати справу з п'ятьма головними компонентами: a_1 — перший член; d — різниця; n — число членів; a_n — n-й член; S_n — сума перших n членів. Між ними встановлені два основних відношення:

$$1)\ a_n = a_1 + d(n-1);\quad 2)\ S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n.$$

Значить, кожного разу слід задавати три компоненти з п'яти, а два останніх можна знайти обчисленням. Тому можливі типи задач визначаються даними:

1) a_1, d, a_n; 2) a_1, d, n; 3) a_1, d, S_n; 4) a_1, a_n, n; 5) a_1, n, S_n; 6) d, a_n, n; 7) d, a_n, S_n; 8) d, n, S_n; 9) a_n, n, S_n; 10) a_1, a_n, S_n.

Неважко зрозуміти, що третій і сьомий типи приводять до квадратного рівняння, а всі останні — до рівняння першого степеня.

Учителю залишається відмітити, що коли в умові задачі на арифметичну прогресію фігурують не тільки основні компоненти, а й інші, то буває корисно застосувати відомі властивості:

$$a_k + a_{n+1-k} = a_1 + a_n,\ a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Систематизацію, подібну розглянутій, можна провести і по відношенню до задач на геометричну прогресію.

Зрозуміло, що систематизуючий розгляд не тільки корисний для повторення теорії і розв'язування задач, але має ще й, очевидно, виражений дослідницький характер, містить елементи творчості. Істотно нарешті, що він є правильним засобом установлення зв'язків між різними математичними питаннями.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Адамар Ж.* Исследование психологии процесса изобретения в области математики / Пер. с франц. М.: Сов. радио, 1970.
2. *Балк Г. Д.* О применении эвристических приемов в школьном преподавании математики // Математика в школе. 1969. № 5.
3. *Брадис В. М.* Методика преподавания математики в средней школе. М.: Учпедгиз, 1954.
4. *Возняк Г. М., Маланюк К. П.* Прикладна спрямованість шкільного курсу математики. К.: Рад. шк., 1984.
5. *Гастева С. А., Крельштейн Б. И., Ляпин С. Е., Шидловская М. М.* Методика преподавания математики в восьмилетней школе / Под. ред. С. Е. Ляпина. М.: Просвещение, 1965.
6. *Грицаенко Н. П.* Устные упражнения по математике для 4—8 классов (на укр. яз.). К.: Рад. шк. 1984.
7. *Готман Э. Г.* Уравнения, тождества, неравенства при решении геометрических задач. М.: Просвещение, 1965.
8. *Канин Е. С.* К формированию умений и навыков в вычислениях и тождественных преобразованиях // Математика в школе. 1984. № 5.
9. *Канин Е. С., Нагибин Ф. Ф.* Заключительный этап решения учебных задач // Преподавание алгебры и геометрии в школе. М.: Просвещение, 1982.
10. *Колмогоров А. Н.* Диалектико-материалистическое мировоззрение в школьных курсах математики и физики // Квант. 1980. № 4.
11. *Колягин Ю. М.* Задача в обучении математике. М.: Просвещение, 1977. 4. I. Математические задачи как средство обучения и развития учащихся; 4. II. Обучение математике через задачи и обучение решению задач.

12. *Колягин Ю. М.* и др. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика / Колягин Ю. М., Оганесян В. А., Саннинский В. Я., Луканкин Г. Л. М.: Просвещение, 1975.
13. *Колягин Ю. М., Харьковская В. Ф., Гульчевская В. Г.* О системе учебных задач как средстве развития математического мышления школьников // Из опыта преподавания математики в средней школе. М.: Просвещение, 1979.
14. *Кордемский Б. А.* Математическая смекалка. М.: Гос. изд-во техн. мат., 1957.
15. *Крутецкий В. А.* Психология математических способностей школьника. М.: Просвещение, 1968.
16. *Метельский Н. В.* Дидактика математики. Минск: Изд-во Белорус. гос. ун-та. 1975.
17. *Нагибин Ф. Ф., Канин Е. С.* Математическая шкатулка. М.: Просвещение, 1984.
18. *Нешков К. И., Семушин А. Д.* Функции задач в обучении // Математика в школе. 1971. № 3.
19. *Пойа Д.* Как решать задачу. М.: Учпедгиз, 1959.
20. *Пойа Д.* Математическое открытие. М.: Наука, 1970.
21. *Репьев В. В.* Общая методика преподавания математики. М.: УПГ, 1958.
22. *Столяр А. А.* Педагогика математики. Минск.: Высш. шк., 1974.
23. *Фридман Л. М.* Психолого-педагогические основы обучения математике в школе. М.: Просвещение, 1983.
24. *Фридман Л. М., Турецкий Е. Н.* Как научиться решать задачи. М.: Просвещение, 1984.
25. *Фуше А.* Педагогика математики / Пер. с франц.; Под ред. И. К. Андронова. М.: Просвещение, 1969.
26. *Хабиб Р. А.* Организация учебно-познавательной деятельности учащихся. М.: Педагогика, 1979.
27. *Хинчин А. Я.* Педагогические статьи. М.: Изд. АПН РСФСР, 1963.
28. *Эрдниев П. М.* Методика упражнений по математике. М.: Просвещение, 1970.
29. *Эсаулов А. Ф.* Психология решения задач. М.: Высш. шк. 1972.

РОЗДІЛ 6

ОРГАНІЗАЦІЯ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ

Крім аналізу змісту курсу шкільної математики до завдань методики математики входять дослідження і опис значної кількості питань, пов'язаних з навчанням математики. Серед них одне з найістотніших місць займає організація навчання математики, всебічний розгляд якого є головною темою даного розділу. Найбільша увага в ньому приділяється описові поширеної організаційної форми навчання — уроку. Розглядаються різні типи уроків, з'ясовуються основні їх функції в процесі навчання математики, аналізуються можливості використання різних методів навчання під час проведення уроків кожного виду. У відповідності з базисною установкою радянської педагогіки на формування інтересу до учіння розглядаються організаційні способи активізації процесу навчання і підвищення зацікавленості в ньому учнів. З цих позицій описані питання організації домашньої роботи учнів і різних видів контролю. Коротко подаються також особливості організації навчання математики у вечірніх (змінних) середніх загальноосвітніх школах і середніх профтехучилищах.

§ 1. УРОК, ЙОГО СТРУКТУРА. ОСНОВНІ ВИМОГИ ДО УРОКУ. ТИПИ УРОКІВ

1.1. Суть уроку математики. Основною формою організації навчально-виховної роботи з учнями в середній школі є урок. Суть його розкривається в дидактиці.

Поняття «урок» має характерні риси (основні характеристики): мета, зміст, засоби і методи навчання, організація навчальної діяльності.

Головну роль серед основних характеристик відіграють цілі уроку: освітні, виховні і розвиваючі.

До обов'язкових цілей відноситься формування математичних знань, умінь і навичок. Але формувати слід не тільки математичні, а й загальнонавчальні знання, уміння і навички, які сприяють більш раціональній організації навчання математики.

В органічній єдності з навчанням здійснюються цілі виховання і розвитку особистості школяра.

Навчальні програми з математики передбачають розв'язання певних виховних завдань. Для зміцнення виховного впливу навчання вчитель зобов'язаний старанно аналізувати можливості математики і визначити виховну ціль кожного уроку.

У відповідності з метою уроку визначається зміст навчання, і перш за все зміст уроку. Визначити мету уроку, раціонально відібрати навчальний матеріал учителю допомагають навчальні програми, підручники, методичні посібники, дидактичні матеріали. Специфіка навчального предмету «математика» така, що виклад матеріалу на уроці будується при умові збереження логіки розкриття цієї теми в шкільному підручнику.

Вибір оптимальних методів навчання — одно з найважчих методичних завдань. В педагогічній літературі є рекомендації здійснення вибору оптимальних методів навчання. Ось одна з таких рекомендацій [22, 90]:

Вибір методу не буде оптимальним, якщо обраний метод не задовольняє хоч би одній з умов, від яких він залежить:

1) мета уроку (навчаюча, виховна і розвиваюча);

2) особливості змісту навчального матеріалу (складність, новина, характер);

3) особливості учнів класу (рівень розвитку мислення, знань, умінь, сформованість навичок навчальної праці, рівень вихованості учнів і ін);

4) укомплектованість кабінету дидактичними матеріалами, технічними засобами навчання;

5) ергономічні умови (час проведення уроку за розкладом, кількість учнів класу і т. д.);

6) індивідуальні особливості вчителя (риси характеру, рівень оволодіння тим чи іншим методом, його взаємини з класом).

Навчальний процес передбачає органічну єдність засобів, методів і прийомів роботи з організаційними формами навчання. Кожному методу, прийому навчання відповідає своя організаційна форма, яка

визначається відношенням між учителем і учнями та учнями між собою.

Учитель керує всією навчальною діяльністю на уроці, використовуючи при цьому загальні (робота з усім класом), групові (ланка, бригада і т. п.) та індивідуальні форми її. Зазначені вище форми організації навчальної діяльності проявляються на уроці в різних сполученнях і послідовностях.

В сучасних умовах навчання досить чітко ставиться питання про застосування таких організаційних форм роботи на уроці, які б забезпечували ефективне засвоєння не лише знань, умінь і навичок, але й цінного досвіду моральних і колективістських відношень.

Величезна роль тут належить колективним формам роботи, які дозволяють ущільнювати час уроку, створюють ситуації взаємонавчання і істотно впливають на розвиток особистості.

1.2. Про структуру уроку. Розглядаючи урок в точки зору логіки процесу навчання, ми прийдемо до поняття «структура уроку». В дидактиці [17; 102] досліджується поняття «загальна дидактична структура», суть і компоненти якої вбачаються із схеми:

Актуалізація попередніх знань і способів дій → Формування нових знань і способів дій → Застосування — формування умінь і навичок

Число компонентів загальної структури стале — їх завжди три.

Тепер будемо говорити про структуру конкретного уроку математики. По своїй суті вона залишається тією самою, але форма її може бути іншою внаслідок багатьох причин. Однією з них є необхідність деталізації компонентів загальної структури.

Кожний з компонентів загальної структури досить широкий за змістом і обсягом. Наприклад, під актуалізацією попередніх знань і способів дій розуміють не тільки відтворення раніш вивчених знань і способів дій, але й їх застосування в нових ситуаціях, стимулювання пізнавальної активності учнів, перевірка вчителем рівня засвоєння знань і т. д.

Такі ж широкі два інших компоненти загальної структури уроку.

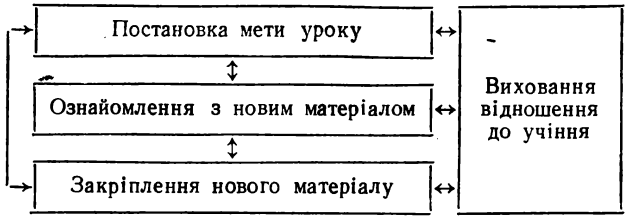
Роздрібнюючи компоненти загальної дидактичної структури, ми фактично одержуємо більш конкретні кроки (етапи) процесу навчання на уроці, які можуть виступати в різних послідовностях і взаємозв'язках.

Використовуючи поняття «структура уроку математики», важливо виділити з множини можливих **основні етапи:**

1. Постановка мети (триєдиної) уроку перед учнями.
2. Ознайомлення з новим матеріалом.
3. Закріплення нового матеріалу: а) на рівні відтворення інформації і способів діяльності; б) на рівні творчого застосування і добування знань.
4. Перевірка знань, умінь і навичок.
5. Систематизація і узагальнення вивченого матеріалу (з теми, розділу і т. п.).

Для кожного уроку обов'язковим є перший етап — постановка мети уроку, вибір останніх обумовлений його метою.

Загальна структура уроку, головна дидактична мета якого — ознайомлення учнів з новим матеріалом, така:



Спираючись на мотиви навчання, необхідно залучити учнів до роботи, що буде на уроці, викликати потребу в пізнанні, в самоконтролі і самооцінці своєї діяльності і т. д. Протягом усього уроку вчитель вивчає реакцію учнів на все, що відбувається на уроці.

Ми знаємо, що окремий урок — це тільки одна ланка ланцюга уроків з даної теми або розділу шкільного курсу. Але з іншого боку урок і навіть кожний його етап — це щось ціле, закінчене.

1.3. Основні вимоги до уроку. Аналіз структури показує, що провідну роль в ній відіграє мета уроку: саме мета уроку визначає його структуру, задає відношення між етапами уроку, підпорядковує їх і об'єднує в єдине ціле.

Отже, однією з головних вимог до уроку є його **цілеспрямованість.**

В літературі з методики викладання математики можна знайти конкретні рекомендації про постановку загальної мети уроку, суть якої полягає в тому, що на початку виділяється головна дидактична (навчаюча) мета, виходячи з якої з'ясовуються можливості для встановлення цілей виховання і розвитку учнів на уроці математики через його математичний зміст.

Цілеспрямовано і планомірно слід здійснювати не лише навчання математики, а й виховання на уроці математики.

Для практики навчання досить важливо, щоб мета уроку, яка поставлена вчителем, була зрозуміла кожному учневі. Осмислені учнем мета, навчально-пізнавальне завдання допомагають йому діяти активно і прискорюють процес здобуття результату своїх дій.

Очевидно, що діяльність учнів обумовлена структурою уроку, тому слід прагнути до того, щоб оптимально забезпечувалась цікава і активна діяльність.

Загальна мета уроку (єдність навчання, виховання і розвитку) спричиняє нові за змістом і структурою уроки математики. Коротко опишемо структуру двох уроків, мета яких «навчати вчитися».

Приклад 1. Учитель Х. в системі уроків, що проводяться в молодших класах, передбачає спеціальні уроки: «Як я вчу уроки з математики».

В один із днів тижня для шестикласників було заплановано провести два уроки математики. На першому вводилось нове для учнів правило додавання раціональних чисел з різними знаками і робилися

перші кроки у формуванні умінь застосовувати одержане правило на практиці. В кінці першого уроку шестикласники одержали домашнє завдання: опрацювати текст підручника, виконати вправи. Учні його виконали не вдома, а на другому уроці математики.

Учитель дає цільову установку: «Діти, зараз ми будемо разом виконувати домашнє завдання». Домовилися про послідовність його виконання: перш за все необхідно вивчити, осмислити текст з навчального посібника, потім вивчити правило додавання, але не шляхом багаторазового повторення його, а в процесі виконання вправ, промовляючи правило спочатку вголос, а потім в умі.

Учні п'ятого класу вчаться читати навчальну книжку за спеціальним взірцем, опис якого в подробицях можна знайти в книзі М. І. Борисова [6].

Кожний учень має в підручнику закладки — чисті смужки паперу, довжина яких дорівнює довжині сторінки, а ширина — ширині її поля. Одна така смужка суміщається з полем сторінки, яка читається. Читання тексту проводиться з олівцем в руці. При першому читанні на занумерованій смужці виконують розмітки прочитаного: головна думка, наприклад, відмічається круглими дужками, особливо важливі місця — знаком оклику або двома вертикальними рисками і т. п. При повторному читанні учень намагається розібрати важкі місця в тексті, перечитати основні думки, сформулювати головні питання і записати до них відповіді в робочому зошиті і т. д.

У роботі над текстом попереднього уроку учні відмітили найголовніше — правило додавання і зразки виконання дії. Потім у відповідності із взірцями, промовляючи етапи, зазначені в правилі, вони виконують додавання.

Так поступово учні набувають уміння «вчити уроки».

Приклад 2. В старших класах можливо, виходячи з припущення, що учні вміють добувати нові знання з математичної книжки, побудувати урок так, що на перший план виступає обговорення нового матеріалу, який учні самостійно вивчали вдома. Учні спочатку задають питання з самостійно проробленого матеріалу, показують, як вони виділяли головне, робили висновки і т. д.

Друга важлива вимога до уроку математики — це **раціональна побудова його змісту**. Безперечно, що на уроці математики головним є його математичний зміст, який повинен глибоко відображати логіку даного навчального предмету і бути визначаючим у всьому, що робиться на уроці. Саме на базі математичного змісту уроку формуються в учнів три види вмінь і навичок: математичні, загальноінтелектуальні (прийоми розумової діяльності), уміння і навички навчальної діяльності.

Важливо не стільки навчати учнів математичним фактам, а скільки залучати їх до методів математики, розвивати в них мислення.

Якщо, наприклад, заплановано ознайомити учнів на уроці з новою теоремою та її доведенням, то на весь зміст треба подивитися з точки зору навчання дедуктивним умовиводам, загальним методам доведення і т. п. Цей самий математичний зміст учитель аналізує і з точки зору можливостей просування учнів по шляху оволодіння навчальними

діями, наприклад діями «одержання висновків» і «підведення під поняття» [33].

Навчання всіх видів змісту, вмінь і навичок слід проводити планомірно, за певною системою. На кожному уроці важливо виділити стержневу ідею математичного змісту і навколо неї згрупувати все останнє.

Третя вимога до уроку — це оптимальний вибір засобів, методів і прийомів навчання і виховання. Успіх справи залежить тут у багатьох відношеннях від того, наскільки глибоко вникає вчитель у специфіку навчального матеріалу, наскільки вміло ставить навчально-пізнавальні задачі, враховуючи при цьому рівень загальної математичної підготовки учнів, їх індивідуальні якості і прогнозуючи результати використання тих чи інших засобів, методів або прийомів.

Вибираючи засоби, методи і прийоми навчання, необхідно пам'ятати, що не можна їх універсалізувати. Жоден із засобів, жоден із методів, взятих ізольовано, не може забезпечити досягнення цілей навчання.

Специфіка самого предмету «математика» така, що головним у навчанні є наочно-вербальні засоби в різних комбінаціях. Урок математики характеризується комплексним застосуванням наочних і технічних засобів навчання.

Насущні завдання самоосвіти полягають в підсиленні ролі друкованих засобів на уроках математики, зокрема при роботі з навчальною книгою безпосередньо на уроці.

Абстрактний характер математичних понять викликає труднощі сприймання їх учнями. Одним із засобів подолання таких труднощів є моделювання. В шкільному курсі математики, щоб розкрити суть понять і відношень між ними, використовуються моделі різного виду: предметні, графічні, знакові. Серед їх різноманітності важливо вміти виділяти головні, основні. До таких можна віднести координатну пряму, координатну площину і ін.

В методичній літературі зустрічається термін «опора», який трактується як допоміжний засіб навчання. Так, вище згадані моделі по суті своїй є також своєрідні опори. В кожній темі шкільного курсу математики можна виділити різного виду опори (наочно-образні, умовно-символічні і ін.), призначення яких досить різноманітне. Коли на уроках виникає проблема простої розповіді про складне, використовують наочно-образні опори (рисунки, креслення, виділення найголовнішого за допомогою підкреслення).

Опори різного роду можуть будувати самі учні, наприклад схему доведення теореми або розв'язання задачі якого-небудь типу.

Урок математики характеризується *різноманітністю форм організації навчальної діяльності учнів.* Завдання самоосвіти, самоконтролю і самооцінки своєї праці вимагають розвитку індивідуальних форм організації навчальної діяльності.

В педагогічній практиці учителів використовуються і групові форми роботи учнів на уроках. Правильно організувати роботу учнів в групах — серйозна методична проблема. Неприпустимо, щоб активними в неоднорідних групах були тільки сильніші учні, щоб вони на-

в'язували іншим членам групи свої думки, розв'язання проблем, давали списувати готові розв'язки задач і т. д. Непродумана групова робота може спричинити велику шкоду справі навчання і виховання. Добре, коли сильні (в успішності) учні спрямовують роботу більш слабких учнів даної групи, допомагають їм просуватися вперед, стежать за успіхами інших.

В залежності від поставленої мети групи можна формувати досить різними способами.

1.4. Типи уроків. В сучасній дидактичній і методичній літературі частіше всього застосовується класифікація за основною дидактичною метою уроку.

Нехай основна дидактична мета уроку — ознайомлення учнів з новим матеріалом. У відповідності з цією метою центральним етапом уроку є ознайомлення з новим матеріалом. Останні етапи можуть бути або відсутніми, або менш значимими по відношенню до основних.

Якщо основна дидактична мета уроку — закріплення вивченого матеріалу, то природно, урок слід віднести до уроків закріплення знань і т. д. Приймаючи до уваги таку залежність, одержимо чотири типи уроків математики:

1) ознайомлення з новим матеріалом;
2) закріплення вивченого;
3) перевірка знань, умінь і навичок;
4) систематизація і узагальнення вивченого матеріалу.

Відразу зауважимо, що ця класифікація виключає уроки комбінованого типу.

Можливі різновидності названих вище основних типів уроків. Наприклад, урок закріплення знань ділиться на два підтипи: урок тренувального характеру і урок творчого застосування знань. Але це не означає, що урок тренувального характеру не має продуктивних методів, а на уроці творчого застосування знань відсутні репродуктивні методи.

У процесі навчання математики закріплення знань відбувається в основному за допомогою розв'язування задач, тому уроки закріплення знань називають уроками розв'язування задач.

Досить часто виділяють як самостійні уроки-лекції, уроки самостійної роботи учнів, громадського огляду знань і ін.

З точки зору основної дидактичної мети всі уроки є лише різновидами одного з чотирьох зазначених основних типів. Урок-лекція — це урок ознайомлення з новим матеріалом, а урок огляду знань — урок перевірки знань, умінь і навичок.

Розглянута класифікація уроків за їх основною дидактичною метою не позбавлена недоліків. Наприклад, назва основних типів уроків у цій класифікації нічого не говорить ні про внутрішню організацію навчального процесу, ні про способи проведення уроку. Ось чому для характеристики уроків використовуються різні класифікації і навіть їх сукупності.

На практиці крім розглянутої використовується і класифікація уроків **за способами їх проведення**. Тут виділяється, наприклад,

урок-повторення, урок-бесіда, урок — контрольна робота, комбінований урок і т. д.

Частіше всього для характеристики якого-небудь конкретного уроку виходять із двох класифікацій: за основною його дидактичною метою і за способами проведення. Наприклад, у самій назві «урок-лекція» вбачається і його основна мета, і спосіб його проведення.

Безумовно, що жодна з класифікацій не може дати повної характеристики уроку.

§ 2. ПІДГОТОВКА ВЧИТЕЛЯ ДО УРОКУ. АНАЛІЗ УРОКУ

Підготовка уроку — це своєрідна творча лабораторія вчителя. Але щоб творити, треба мати добрі теоретичні знання з методики, в тому числі і з питань підготовки і планування уроку.

Система планування передбачає: 1) планування на рік або на півріччя; 2) тематичне планування; 3) поурочне планування.

У відповідності з цією системою можна виділити три етапи в підготовці до уроків: підготовка до нового навчального року; підготовка системи уроків з навчальної теми; підготовка до наступного уроку.

2.1. Підготовка системи уроків. *На першому етапі* в загальному плані розв'язуються такі питання: для чого, чому і як учити учнів даного класу. Тут важливо враховувати те, чому і як навчались учні в попередні роки, і бачити перспективи навчання в наступні роки. У навчанні математики завжди актуальною є проблема наступності. Особливо гостро вона постає перед учителем, який приступає до роботи в V класі або вперше йде в будь-який інший клас.

До початку навчального року вчитель детально вивчає програму, пояснюючу записку до неї, аналізує зміст шкільного підручника, складає списки літератури окремо для себе і для учнів.

Задовго до початку навчального року перевіряється обладнання кабінету математики, наявність у ньому різних засобів навчання.

У відповідності з навчальним планом і програмою здійснюється планування на півріччя чи на рік, яке має наближений поділ (розбивку) навчального матеріалу за уроками. Таке планування (з поділом на уроки) публікується в методичних посібниках для вчителя або в журналі «Математика в школі».

На другому етапі підготовки вчителя до уроку центральне місце займає **тематичне планування**, примірний зміст якого вбачається із наведеної тут схеми. Відмітимо, що ця схема лише одна з можливих.

Розглянемо зміст розділів I—IV тематичного плану.

I. *Назва теми* береться з навчальної програми або конкретизується на її основі.

1. В тематичному плані достатньо зазначити загальну дидактичну мету системи уроків з даної теми. В окремих випадках корисно виділити виховне або розвиваюче значення теми.

2. Зазначення типів уроків дозволяє вчителю працювати з перспективою.

План дозволяє передбачити, наприклад, кіноурок або екскурсію і урок застосування матеріалів екскурсії і т. п.

Схема тематичного планування

Зміст розділів I—IV	Номер уроку				
	1	2	3	...	...
I. Назва теми 1. Загальна дидактична мета і системи уроків з теми 2. Тип уроку 3. Загальні методи навчання 4. Обладнання і основні джерела інформації					
II. Актуалізація знань 1. Опорні знання і способи дій 2. Джерела повторення 3. Типи самостійних робіт					
III. Формування нових понять і способів дій 1. Нові поняття і способи дій 2. Основні проблеми і типи самостійних робіт					
IV. Застосування (формування умінь і навичок) 1. Типи самостійних робіт 2. Міжпредметні зв'язки					

3. В тематичному плані можна зорієнтувати вчителя на застосування того чи іншого методу навчання.

Рекомендації, що стосуються вибору загального методу навчання, подано в книзі Ю. К. Бабанського [4].

4. Керуючись змістом і загальними методами навчання, намічають основні наочні та технічні засоби навчання, літературу.

II. *Актуалізація.* Одна з особливостей навчання математики — це неперервна логічна опора на попередні знання і способи дії. Вона вимагає особливої уваги до питань актуалізації.

Актуалізація передбачає не тільки відтворення раніш вивченого але й застосування попередніх знань в нових ситуаціях, їх поглиблення. Тому важливо встановити не лише опорні знання, але й вказати основні види навчальних математичних задач, в процесі розв'язування яких будуть актуалізуватися необхідні знання.

III. *Формування нових понять і способів дій — основний розділ плану.* Тут важливо чітко виділити нові поняття і способи дій, які вводяться і вивчаються в даній темі. Бажано показати основні кроки в процесі формування нових понять.

У відповідності з цим виділяються основні навчальні проблеми на уроках з даної теми і з ними тісно пов'язуються типи самостійних робіт.

IV. В останньому розділі тематичного плану важливо *вказати систему вправ*: а) для формування умінь і навичок під час вивчення даної теми; б) для показу практичного застосування математики. Плануються і можливі міжпредметні зв'язки.

Тематичне планування може бути реалізовано більш або менш докладно в залежності від характеру теми, рівня її складності і від багатьох інших причин.

Складання тематичного плану — справа серйозна і важка, вона вимагає від упорядника глибоких теоретичних знань методики і досвіду викладання математики. Науково обгрунтоване тематичне планування під силу колективам досвідчених учителів і методистів.

Не треба думати, що готові тематичні плани сковують ініціативу вчителя. Певно, навпаки, вони спрямовують творчий пошук учителя під час підготовки до конкретних уроків.

Тематичний план дозволяє розглядати кожний конкретний урок як необхідну складову системи уроків з даної теми. Це, безперечно, підвищує значимість кожного уроку, покращує якість навчання в цілому.

2.2. Підготовка до наступного уроку. План уроку вчитель складає на основі тематичного плану, керуючись своїми знаннями особливостей учнів, рівня їх розвитку, загальної і математичної підготовки і умов проведення занять.

План уроку — обов'язковий документ для вчителя. Уніфікованої форми планів не існує: живий, конкретний урок навряд чи можна втиснути в рамки якихось схем або готових форм.

У методичній літературі подаються звичайно приблизні схеми складання коротких і поширених планів — конспектів уроків.

Опишемо один з можливих варіантів роботи для складання плану уроку.

VI клас.

Тема уроку. Додавання двох чисел з різними знаками.

Тип уроку. Урок вивчення нового матеріалу.

Характеристика теми уроку. Теоретична частина теми невелика за обсягом — фактично це правило додавання двох чисел з різними знаками. Враховуючи вікові особливості і рівень математичної підготовки шестикласників, перед ознайомленням з новим для учнів правилом розглядаються конкретні завдання, які ілюструють доцільність його використання. Правило важке і незвичайне для учнів.

Визначення мети уроку. 1. Ознайомити учнів з правилом додавання двох чисел з різними знаками і навчити виконувати дію за цим правилом. 2. Сприяти вихованню в учнів уважності і акуратності щодо застосування правила. Викликати інтерес до результатів додавання. 3. Сприяти формуванню в учнів уміння: а) планувати свою діяльність за аналогією з ситуаціями попереднього уроку; б) аналізувати математичні речення (за допомогою аналізу правила додавання).

Відбір основного змісту навчального матеріалу. 1. Визначимо, які знання треба актуалізувати на уроці. В першу чергу це знання про додавання двох чисел з одинаковими знаками, оскільки новий матеріал є логічним продовженням цих знань. Нове правило буде засвоюватися в порівнянні з правилом додавання двох від'ємних чисел. Новий матеріал вимагає теж вільного

оперування поняттям модуля числа (суть модуля, знаходження модуля числа та порівняння модулів).

Актуалізація вказаних знань буде здійснюватися за допомогою завдань такого виду: 1) дано два числа, пропонується: а) порівняти їх модулі, б) знайти суму модулів цих чисел, в) від більшого модуля відняти менший; 2) дано два від'ємних числа, знайти їх суму.

2. У доцільності нового правила додавання учні переконаються в процесі розв'язування життєвих задач, розв'язання яких записують за допомогою виразів: а) $9 + (-5)$; б) $5 + (-7)$. Аналіз результатів розв'язання дозволить «скласти» нове правило.

3. Робота, спрямована на засвоєння правила, буде проходити в процесі виконання вправ типу: дано два числа з різними знаками, знайти їх суму.

Обладнання уроку. 1. Демонстраційна модель координатної прямої з рухомою на ній точкою. 2. Кодоскоп.

Вибір методів навчання. Основним вибирається метод проблемної бесіди (частково-пошуковий), через те що учні всією попередньою роботою підготовлені до цієї бесіди.

Структура уроку. I. Постановка мети уроку (2 хв).

II. Перевірка вмінь: а) додавати два раціональних числа; б) порівнювати модулі чисел шляхом фронтального опитування і короткочасної перевірочної роботи (10 хв).

III. Ознайомлення з новим матеріалом і його закріплення (28 хв):

а) постановка навчальної проблеми та її розв'язання, «знаходження» правила додавання двох чисел з різними знаками (частково-пошуковий метод, використання аналогії);

б) робота з підручником, аналіз правила, сформульованого в підручнику: виділення в ньому двох кроків у виконанні дії;

в) початкова робота, спрямована на засвоєння правила (вправи);

г) самостійна робота навчаючого характеру (репродуктивного типу).

(Диференційований підхід до учнів. Допомога слабким учням. Звертання до словесної опори — правила, яке вміщено в підручнику. Самоперевірка результатів.)

IV. Проведення підсумків основної роботи на уроці (3 хв).

V. Домашнє завдання (2 хв).

Наведена схема запису проведення уроку, як бачимо, не має передбачених вчителем відповідей учнів. Але аналіз відображеної в ній діяльності учнів дозволить учителю швидко й своєчасно реагувати на їх відповіді.

Відмітимо, що описаний урок на зазначену тему можна побудувати інакше, не порушуючи принципу оптимізації вибору цілей, змісту, методів, засобів і форм організації діяльності. Варіативність структури обумовлена зміною однієї або одночасно декількох умов, які враховуються під час вибору оптимальної структури уроку.

2.3. Аналіз уроку. Припустимо, що план (конспект) уроку складений. Тепер можна у вигляді перевірки цього плану виконати його аналіз, використовуючи опис структури уроку. В процесі перевірки важливо звернути увагу на взаємозв'язок всіх сторін, які характеризують урок.

ХІД УРОКУ

Основний зміст навчального матеріалу	Діяльність	
	учителя	учня
I. Постановка мети уроку перед учнями (1 хв) II. Перевірка вмінь: а) оперувати модулями чисел (порівнювати, додавати, віднімати); б) додавати два від'ємних числа 1. Усна фронтальна робота (5—6 хв). Задані числа: а) —45 і —12; б) +2,6 і —3,7; в) —100 і 100; г) $-11\frac{2}{3}$ і 12; д) —5,3 і 0	Формулює коротко: навчитися додавати два числа з різними знаками Керує усною фронтальною роботою. Умови «а»—«д» записані на дошці до уроку. Вимоги 1 і 2 ставляться послідовно в усній формі	Самостійно виконують усні вправи. В умі перевіряють свою готовність обгрунтувати виконувані дії
1) Знайти суму модулів двох даних чисел 2) Від більшого модуля відніміть менший модуль	Спостерігає за роботою учнів	Викликаний вчителем учень дає обгрунтування вголос
Питання, що будуть використані під час проведення підсумків фронтальної роботи: 1) Чи може сума модулів двох чисел бути: а) від'ємним числом, б) нулем? 2) Чи може різниця двох модулів дорівнювати нулю? 3) Які числа мають рівні модулі?	Підводить підсумки роботи	
2. Короткочасна перевірочна робота (7—8 хв) Кодопозитив Знайдіть суму двох чисел: *Варіант перший* 1) —50 і —36,5; 2) $1\frac{2}{7}$ і $1\frac{5}{7}$; 3) —13,8 і —22,2; 4) —1,75 і —0,35; 5) —0,85 і —2,15; 6) —17 і 0 *Варіант другий* 1) —10 і —1000; 2) $2\frac{5}{13}$ і $2\frac{8}{13}$; 3) —13 і —8,7; 4) —0,85 і —2,25; 5) —0,35 і —1,65; 6) —38 і 0	Об'являє мету роботи, ставить вимоги Включає кодоскоп Дає розпорядження про взаємоперевірку результатів	Застосовує правило додавання двох чисел з однаковими знаками. Перевіряє роботу сусіда. Здає аркуш для перевірки вчителю

Продовження

Основний зміст навчального матеріалу	Діяльність	
	учителя	учня
III. Ознайомлення з новим матеріалом та його закріплення (28 хв) за допомогою частково-пошукового методу		
1. Постановка проблеми: «одержати» правило додавання двох чисел з різними знаками	Робимо аналогічно тому, як це робили на попередньому уроці	
2. «Пошук» розв'язання проблеми через виконання завдань:		
Завдання 1. Складіть задачу, в якій треба виконати додавання двох чисел: +9 і —5.		Пригадує зміст текстових задач, що розглядалися на попередньому уроці. Це допомагає скласти конкретну задачу, аналогічну попередній, і знайти засіб для одержання результату
Можливі тексти задач:		
А. Задача: «Перша зміна температури +9°, друга —5°. Знайти результат двох цих змін»	Залучає учнів до обговорення тексту задачі і оцінки результату розв'язання	
Б. Задача: «Моторна лодка рухалась від пункта О спочатку за течією річки 9 км, а потім 5 км проти течії. Знайти її місце розміщення після двох переміщень»		За викликом учителя читає текст складеної задачі і пояснює розв'язування її на моделі координатної прямої
Записати на дошці: $\frac{9+(-5)=?}{9+(-5)=4}$ (показ на координатній прямій)	Основні кроки роботи учнів фіксуються на дошці	
Завдання 2. Складіть задачу, в якій потрібно було б додати два числа: +5 і —7	Організовує роботу, аналогічну вище наведеній (див. виконання завдання 1)	
Записи на дошці: $\frac{(+5)+(-7)=?}{(+5)+(-7)=-2}$ (показ на координатній прямій)		Зорове і слухове сприйняття результатів колективної роботи

Продовження

Основний зміст навчального матеріалу	Діяльність	
	учителя	учня
Колективна робота в «складанні» нового правила. Установимо знак числа — суми $(+9)+(-5)$. Додатній доданок має більший модуль. $9+(-5)=4;\ 4>0$	Спрямовує на розкриття структури нового правила за аналогією з попереднім	Виділяє в попередньому правилі дві його частини: 1) домовленість про знак числа — суми; 2) домовленість про модуль числа — суми
$(+5)+(-7)$. Від'ємний доданок має більший модуль. $(+5)+(-7)=-2,\ -2<0$	«Командує» тут те число, модуль якого більший	Перевіряє першу частину нового правила на прикладах: $9+(-5)=4$ $(+5)+(-7)=-2$
Установимо, як одержується модуль числа — суми	Як одержано модуль числа — суми в прикладах: $9+(-5)=4$, $5+(-7)=-2$?	За догадкою: $\|9\|-\|-\|5\|=4$ $\|-7\|-\|5\|=2$
Формулювання правила (в цілому) Робота з підручником — вивчення структури даного в підручнику правила	Допомагає учням Дає установку на розуміння суті правила і його структури	Формулює правило Читає правило, виділяє в ньому дві частини
3. Початкова робота для засвоєння правила в процесі його застосування: Вправи Знайдіть суму двох чисел: 1) $(+6)+(-38)=$; 2) $(-15)+7=$; 3) $(-5)+28=$; 4) $17+(-33)=$; 5) $17{,}2+(-34{,}2)=$; 6) $-15{,}25+25{,}5=$; 7) $-\frac{2}{13}+\frac{7}{13}=$	На початку показує взірець застосування правила Викликає по черзі до дошки учнів, слідкує за відповідями	Виконує приклади за кроками, промовляючи правило або в голос, або про себе. Якщо виникають труднощі, звертається до правила в підручнику
Самостійна робота навчаючого змісту (репродуктивного типу) Знайти суму двох чисел: *Варіант перший* 1) -17 і $+5$; 2) -100 і 1; 3) 57 і -13; 4) $-3{,}9$ і $3{,}91$; 5) $2\frac{1}{15}$ і $-2\frac{13}{15}$; 6) $-\frac{1}{2}$ і $1\frac{1}{2}$; 7) -3 і $0{,}83$	Здійснює диференційований підхід до учнів. Допомагає відстаючим	Працює у своєму темпі. Звертається до опори правила, у випадку необхідності до вчителя. Звіряє результати своєї роботи з відповідями, що виписані на дошку. Підводить підсумки своєї роботи

Закінчення

Основний зміст навчального матеріалу	Діяльність	
	учителя	учня
Варіант другий 1) 3 і —17; 2) —500 і 501; 3) 100 і —1; 4) 12 і —21,8; 5) —21,8 і 0,8; 6) $-\frac{2}{17}$ і $1\frac{2}{17}$; 7) 0,37 і —2		Скільки розв'язав задач: а) правильно; б) неправильно? В чому були труднощі?
Підведення підсумків самостійної роботи	Вибірково перевіряє роботи учнів, заслуховує звіти деяких учнів, проводить загальний підсумок	
IV. Підведення підсумків уроку V. Домашнє завдання (1—2 хв): а) з теорії; б) практична частина	Записує на дошці завдання додому (пояснень не потрібно)	

Після проведення уроку вчитель мисленно (в думці) його аналізує, виявляючи найбільш вдалі моменти або основні його недоліки та їх причини. Корисно в плані (конспекті) робити відповідні помітки (резюме).

Секції вчителів математики організовують взаємовідвідування уроків у відповідності з метою, яка визначається заздалегідь. Тут аналіз уроку може бути засобом покращання викладання, впровадження чогось нового в практику роботи вчителів.

Під час педагогічної практики студенти проводять цілеспрямовані спостереження і аналізують уроки під керівництвом вчителів-методистів і самостійно. В цьому разі аналіз стає дійовою школою методичної підготовки.

Керівництво школи здійснює контроль, надає допомогу вчителю у роботі. В цьому випадку аналіз виконує функцію засобу контролю і навчання. Самоаналіз уроків — це засіб самоконтролю вчителя за навчально-виховною роботою в своїх класах. Суть аналізу може полягати в оцінюванні всіх можливих сторін навчально-виховного процесу на уроці.

Всебічний аналіз, який дозволяє розглядати в органічній єдності і взаємозв'язку основні характеристики уроку — цілі, зміст навчання, засоби й методи навчання, організацію діяльності на уроці — і основні структурні елементи уроку, називають комплексним.

Можна виділяти окремі сторони уроку і детально аналізувати одну з них, маючи на увазі певну мету. Такий вид аналізу називають ас-

пектним [17]. Аспекти аналізу уроку можуть бути досить різноманітними. Вкажемо на деякі з них:

1. Реалізація триєдиної мети уроку (дидактична, виховна і розвиваюча).
2. Науковий рівень математичного змісту уроку.
3. Аналіз загальної структури уроку.
4. Методи навчання на уроці.
5. Діяльність учителя і учнів на уроці.
6. Формування навчальних умінь і навичок в учнів і ін.

Можна виділити також психологічний, етичний, гігієнічний та інші аспекти аналізу уроку.

Найголовніше для уроку математики є математичний і виховний його зміст. Будь-який вид аналізу уроку слід тісно пов'язувати з аналізом його математичного змісту. В противному разі навіть вузький аспект аналізу, на перший погляд мало пов'язаний з математичним змістом, може виявитися неповноцінним.

Загальна оцінка уроку дається за результатами діяльності, а не за її зовнішнім проявленням.

§ 3. ОРГАНІЗАЦІЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ ПРИ НАВЧАННІ УЧНІВ МАТЕМАТИКИ

Одним з найважливіших засобів систематичного й міцного засвоювання програмового матеріалу з математики, розвитку творчих здібностей і виховання учнів є самостійна робота. «...Без відомої самостійної праці в жодному спірному питанні, — вказував В. І. Ленін, — істини не знайти». Н. К. Крупська вбачала, що навчити самостійно оволодівати знаннями — одна з найважливіших проблем, яку повинна розв'язати радянська школа.

Прищеплення учням навичок самостійної роботи завжди було одним з головних завдань на кожному кроці розвитку середньої школи.

Практика показує, що під час навчання математики необхідно приділяти значну увагу самостійній роботі учнів, організації виконання різних вправ. Без цього не може бути засвоєння програмового матеріалу з математики. Тільки в процесі виконання різних вправ, завдяки цим вправам відбувається закріплення математичних понять, формуються і вдосконалюються обчислювальні навички, набувається уміння геометричних побудов, розвивається просторове уявлення учнів, уміння застосовувати знання на практиці, використовувати свій досвід під час розв'язання задач і т. д.

У процесі виконання самостійної роботи з математики в учнів розвиваються увага, пам'ять, прагнення обгрунтувати висловлюване, ініціатива.

3.1. Суть самостійної роботи при навчанні математики. У своїй узагальнюючій праці «Самостійна робота учнів на уроці» Б. П. Єсипов пише, що самостійна робота учнів виконується без посередньої участі вчителя за його завданням в спеціально відведений для цього час. При цьому учні свідомо намагаються досягти поставленої в завданні мети, проявляючи свої зусилля і виражаючи в тій чи іншій

формі результати своїх розумових або фізичних (або тих і других разом) дій.

В теорії спостерігаються і інші підходи до поняття самостійної роботи. Ядром будь-якої самостійної роботи П. І. Підкасистий розглядає задачу, яка служить початком самостійної пізнавальної діяльності учня.

Для організації самостійної роботи з математики досить важливим є розуміння учителем структурних її компонентів. Структуру ж самостійної роботи визначають змістовна, процесуальна, мотиваційна сторони навчально-пізнавальної діяльності школярів. У процесі підготовки самостійної роботи вчитель математики турбується за всі сторони діяльності учнів, тому що вони однаково важливі. Єдність цих сторін визначає вибір способів розв'язання прикладу, шляхи міркування під час доведення теореми, розв'язання задачі. Взаємозв'язок цих сторін є однією з умов успішного досягнення результату.

Для успішної організації самостійних робіт з математики вчителю необхідно мати уявлення про існуючі в теорії основні класифікації самостійних робіт. В залежності від конкретних умов учитель здійснює вибір необхідних видів самостійних робіт.

3.2. Види самостійних робіт. Найчастіше зустрічаються в практиці і теорії навчання такі класифікації самостійних робіт:

1. За мірою самостійності учнів.
2. За мірою індивідуалізації.
3. За дидактичними цілями.
4. За джерелом знань і т. д.

До класифікації за мірою самостійності відносяться, наприклад, види самостійних робіт, розроблених П. І. Підкасистим [23]:

1. Відтворюючі самостійні роботи за зразком.
2. Реконструктивно-варіаційні.
3. Евристичні.
4. Творчі (дослідницькі).

В процесі виконання самостійної роботи за зразком пізнавальна діяльність учнів спрямована на оволодіння способами роботи, основними вміннями для наступного застосування в практиці, самостійного вивчення інших наук, галузей. В пізнавальній діяльності учня під час навчання математики це можуть бути різні вправи за зразками і алгоритмами з метою формування обчислювальних навичок, розв'язування найпростіших типових задач, формування вмінь пізнавального і практичного характеру, складання таблиць, схем, побудови елементарних креслень.

Роботи такого виду виконуються за єдиною схемою шляхом послідовних вказівок щодо удосконалення строго відповідної дії. Вони дозволяють засвоїти навчальний матеріал, але не збагачують учнів досвідом пізнавальної творчої діяльності. Наприклад, при побудові кола, висоти, бісектриси, медіани для учня достатньо знань про те, як це виконується, і під час виконання роботи він лише відтворює ці знання в дії. Ці вправи необхідні. Найпростіші задачі на побудову сприяють формуванню вмінь користуватися інструментами, виконувати ті або інші побудови.

Передумовою ж розвитку математичних здібностей, накопичення досвіду творчої діяльності є залучення учнів до виконання більш складних видів діяльності. Класифікація за мірою самостійності застосовується у вигляді робіт за варіантами А, Б, В, Г, які відрізняються один від одного мірою самостійності.

Завдання А.

1. Запишіть в зошит зразок (взірець) запису розв'язання рівняння.

Зразок.

Розв'язати рівняння: $169 \cdot x = 4225$.

Розв'язання:

$169 \cdot x = 4225$;

$x = 4225 : 169$;

$x = 25$.

Відповідь: $x = 25$.

2. За вказаним вище зразком розв'язати рівняння:

а) $138 \cdot x = 14076$; в) $R : 34 = 288$; д) $k - 6895 = 3215$

б) $b \cdot 37 = 11174$; г) $2041 - y = 786$.

Завдання Б.

1. Запишіть в зошит взірець запису розв'язання рівняння.

Зразок.

Розв'язати рівняння: $(1987 + x) : 27 = 2160$.

Розв'язання:

$(1987 + x) : 27 = 2160$;

$1987 + x = 2160 \cdot 27$;

$1987 + x = 58320$;

$x = 58320 - 1987$;

$x = 56333$.

Відповідь: $x = 56333$.

2. Розв'яжіть рівняння за вказаним вище зразком:

а) $(x + 242) + 76 = 538$; в) $(127 + y) - 83 = 1009$;

б) $(x - 379) + 125 = 30\,000$; г) $28x : 4 = 1344$.

Завдання В.

1. Розв'яжіть рівняння:

а) $37 + x + 963 = 1\,000$ в) $8y + 1ay + y = 1200$; д) $\frac{k}{6} = 14$.

б) $30a - 16a = 1498$; г) $\frac{264}{x} = 33$.

Завдання Г.

Знайдіть корені рівнянь:

а) $0 \cdot a = 0$; в) $x : x = 1$;

б) $3 \cdot a = a \cdot 3$ г) $(815 + x) + 284 = 284 + 815 + 581$.

Завдання мають вправи для засвоєння теми «Рівняння».

В завданнях А, Б наведені зразки розв'язання рівнянь. Виконання завдань В і Г вимагає від учня більш високого рівня самостійності, а завдання Г — нестандартного підходу, кмітливості, тобто має елементи творчості.

Відомо, що творчість визначається перш за все новизною і цінністю результату для суспільства.

Творчі роботи при навчанні математики — це такі, під час виконання яких учень відкриває нове для себе. Так, працюючи над пошу-

ком розв'язання, учень досягає відповіді іншим способом, ніж тим, що йому було показано.

Творчі самостійні роботи з математики сприяють формуванню в учнів інтересу до предмету, вихованню позитивного ставлення до навчання, розвитку математичного мислення. Учень вчиться розкривати для себе нові сторони явищ, що розглядаються, висловлює судження, на основі застосування власного досвіду і аналізу вихідних даних знаходить шлях розв'язання задачі, доведення теореми, робить висновки. Все це характеризує цінність творчої діяльності в навчальному процесі. До творчих робіт з математики належать:

а) розв'язування задачі і доведення теореми нестандартним, новим для учня способом;

б) розв'язування задачі декількома способами;

в) складання задач, прикладів самими учнями;

г) математичні твори;

д) доповіді учнів та інші види діяльності.

Розвитку творчості сприяють варіативні завдання. Вони містять елементи творчої пізнавальної діяльності, яка вимагає здійснення пошуку, прояву більш високого рівня самостійності.

Приклади завдань, які містять елементи творчості для учнів V класу:

1. Вертоліт подолав віддаль між містами, що дорівнює 510 км, за 3 г при попутному вітрі і за 4 г при зустрічному вітрі. Поставте запитання і розв'яжіть задачу. До цієї задачі учні можуть поставити два запитання: 1) Яка швидкість вітру? 2) Чому дорівнює власна швидкість вертольоту? Якщо до задачі поставлено друге запитання, то розв'язання можна виконати двома способами.

2. Площі двох прямокутників однакові. Довжини сторін одного з них 16 і 9,6 см, а довжина однієї з сторін другого прямокутника 12 см. Поставте запитання і розв'яжіть задачу. Які запитання ще можна поставити до задачі?

Така постановка завдань створює умови для міркування, аналізу, самостійного встановлення зв'язків між відомими величинами (їх відношеннями), узагальнення, що характерно для творчої діяльності при вивченні математики.

Творчі завдання можуть бути довготривалими за часом. Одним з цікавих видів творчої роботи з математики в практиці є математичні твори. Цей вид роботи вимагає від учнів знання додаткової літератури, уміння узагальнювати прочитаний матеріал, володіння певним художнім стилем при оформленні роботи і т. п.

Для учнів V—VI класів це можуть бути невеликі твори, які розвивають спостережливість, кругозір.

ДЕЯКІ ТЕМИ ТВОРІВ ДЛЯ УЧНІВ V—VI КЛАСІВ:

1. Прості числа.
2. Прямокутники різного виду.
3. Де в житті ми зустрічаємося з дробовими числами?
4. Симетричні фігури.
5. Довжина кола і площа круга.

Дуже цікаві для цього віку твори у вигляді казок.

Для старших класів можна назвати такі теми творів:

1. Рівняння і функції.
2. Способи розв'язування квадратних рівнянь.
3. Теорема Піфагора. Способи її доведення.
4. Симетрія навколо нас.
5. Розвиток числа.
6. Тригонометричні функції та їх властивості.
7. Математика і музика.
8. Математика і біологія.

Математичні твори — це творча робота за цілком визначеною темою протягом великого проміжку часу (1—2 місяці). Після закінчення роботи твори здають в «бібліотеку творчих робіт», а окремі учні роблять доповіді на 5—7 хв.

Основою для оптимального засвоєння математичних знань і математичного розвитку, оволодіння досвідом творчої діяльності є взаємозв'язок відтворюючих і творчих самостійних робіт, наступність у їх виконанні.

Найрізноманітніші види самостійних робіт містить класифікація їх відносно мети застосування:

а) з метою формування математичних понять;

б) підготовчі вправи для формування поняття;

в) вправи і задачі для закріплення нового матеріалу;

г) тренувальні вправи з метою формування умінь застосовувати одержані знання при розв'язуванні задач, прикладів;

д) з метою формування практичних навичок, побудов при розв'язуванні геометричних задач.

В процесі навчання математики застосовуються усні і письмові самостійні роботи: класні і домашні; загальнокласні, групові, фронтальні та індивідуальні.

Відомі й інші класифікації видів самостійної роботи, наприклад за джерелом знань і методом:

а) робота з підручником;

б) робота з довідковою літературою;

в) розв'язування і складання задач;

г) навчальні вправи;

д) твори і описи;

е) завдання за схемами, кресленнями, графіками.

Активне самостійне пізнання можливе тільки для того учня, який уміє **працювати з підручником (книгою).** З метою підготовки учнів до самоосвіти важливого значення набуває завдання озброєння їх умінням працювати самостійно з книгою, і в першу чергу з підручником. Підручники з математики містять теоретичний і практичний матеріал. Друкований текст відрізняється від живого слова вчителя. Текст підручника не враховує різниці між рівнями розвитку учнів, рівнями їх підготовленості. Разом з тим підручник як джерело інформації має ряд переваг: наявність заголовків (розділів, параграфів), шрифтових виділень, креслень, графіків полегшує учневі можливість бачити основні ідеї.

Математичний текст має особливі труднощі для розуміння. Щоб навчити учнів працювати з навчальною математичною книгою, вчителю слід використати звернення до математичного тексту (як прийом у поєднанні з іншими видами самостійних робіт), до виконання практичних вправ за підручником.

Тому важливо учити вже з V класу вмінню розуміти математичний текст: аналізувати, відповідати на запитання, виділяти головні частини тексту, формулювати до них запитання і т. д. У зв'язку з цим в практиці досвідчених учителів математики застосовуються, наприклад, такі завдання по роботі над теоретичним матеріалом підручника:

а) робота з означенням; читання означення (таке завдання передбачає наступне обговорення означення поняття);

б) переказ прочитаного за планом;

в) відповідь на питання;

г) читання тексту, виділення головного в тексті;

д) читання тексту і складання плану;

е) складання таблиць, схем, графіків на основі матеріалу, який подано в підручнику.

Завдання у складанні плану розвивають в учнів аналітико-синтетичну діяльність, допомагають бачити головне, встановлювати зв'язок між поняттями в тексті.

Матеріал додаткових розділів підручників з математики учні можуть використати при підготовці повідомлень, доповідей, рефератів. А історичні відомості, наприклад, в V класі можуть служити для написання твору за темою «Як виникла геометрія», «Як люди навчилися лічити».

Особливої уваги вимагає від учителя організація самостійної роботи учнів з додатковою літературою та при розв'язуванні задач підвищеної трудності. Для опрацювання додаткової математичної літератури учням можна запропонувати такі завдання:

а) вибіркове читання, наведення довідок;

б) порівняння знань, одержаних внаслідок опрацювання додаткової літератури, з раніше засвоєними;

в) ознайомлення з новим методом розв'язування задачі, доведенням теореми;

г) розширення кругозору по темі: підготовка доповідей, анотацій статті та ін.

Важливим в організації самостійної роботи з науково-популярною літературою з математики є правильний її підбір. За формою викладу і оформленням цікавим і привабливим для школярів є журнал «Квант».

Пропаганду математичної книги, навчання прийомам роботи з книгою слід вести систематично в найрізноманітніших формах, починаючи з молодших класів.

Значне місце в навчанні учнів математики займають усні і письмові самостійні роботи, які можна використовувати в різних комбінаціях. У молодших класах на кожному уроці рекомендується протягом 5—7 хв проводити усний рахунок, який сприяє формуванню обчислювальних навичок, розвитку уваги учнів, їх ініціативи.

Проведення усних самостійних робіт допомагає вчителю організувати весь клас і створити в класі робочу обстановку.

Досвідчені вчителі застосовують різні прийоми організації усних і письмових самостійних робіт.

Однією з складових навчального процесу є **домашня самостійна робота** учнів. В процесі виконання такого завдання учні повторюють і закріплюють набуті на уроці знання, уміння, навички. Домашні роботи виховують почуття відповідальності, формують навички самоосвіти. Але при цьому вчителю математики необхідно кожного разу звертати увагу на обсяг домашньої роботи і не перекладати центр ваги в навчанні математики на домашні завдання, як це часто і густо буває. Обсяг і характер домашніх завдань визначається в кожному окремому випадку планом навчальних занять з розділу, що вивчається. В залежності від класу, змісту конкретного матеріалу домашні завдання даються по матеріалу уроку або по темі програми.

З удосконаленням уроку необхідно підвищувати творчий характер домашньої самостійної роботи, індивідуалізувати її. Слід удосконалювати форми, в яких дається домашня робота.

Як зміст роботи, так і прийоми її організації повинні мати виховний характер, сприяти розвитку мислення учнів.

В методичній і дидактичній літературі розглядаються всі зазначені види самостійних робіт.

Успішне виконання учнями самостійних робіт залежить від конкретних умов, наприклад від таких:

а) змісту матеріалу;

б) рівня підготовленості учнів;

в) ставлення учнів до предмета;

г) дидактичних прийомів організації діяльності учнів з боку вчителя.

§ 4. ПОВТОРЕННЯ

4.1. Організація повторення. В процесі навчання математики важливе місце відводиться організації повторення матеріалу, що вивчається. Необхідність повторення обумовлена завданнями навчання, які вимагають міцного і свідомого оволодіння знаннями.

Розуміючи важливість процесу повторення навчального матеріалу, дослідники показали значну роль при цьому таких дидактичних прийомів, як порівняння, класифікація, аналіз, синтез, узагальнення, що сприяють інтенсивному проходженню процесу запам'ятовування. При цьому формуються гнучкість, рухомість розуму, здібність до узагальнення знань.

У процесі повторення пам'ять в учнів розвивається. Емоційна пам'ять, яка спирається на наочно-образні процеси, поступово замінюється пам'яттю з логічними процесами мислення, основою якої є уміння встановлювати зв'язки між відомими й невідомими компонентами, зіставляти абстрактний матеріал, класифікувати його, обгрунтовувати свої висловлення.

Повторення навчального матеріалу з математики здійснюється у всій системі навчального процесу: під час викладу вчителем нових

понять, закріплення раніш вивченого, організації самостійної роботи різних видів, під час перевірки знань учнів і т. д.

Необхідність повторення раніш вивченого матеріалу викликана самою структурою програми навчального курсу математики. Так, програмою передбачено розширення основних понять про число, про величину та її вимір, про функціональну залежність, геометричні перетворення.

Кожне з математичних понять нагадує багатогранний камінь — самоцвіт. Наприклад, учні знайомляться з числами натурального ряду, потім поступово поняття про число розширюється, з'являються дробові числа, від'ємні, ірраціональні.

В зв'язку з цим особливо важливе значення для організації успішного навчання учнів математики має систематичне повторення раніш вивченого, що пов'язано з даним уроком, з матеріалом попередніх уроків, тобто **систематичне** повернення до раніш вивченого.

Введення нових чисел викликає необхідність виконання дій над ними. Виконання ж дій над дробовими числами пов'язано з повторенням правил виконання дій над натуральними числами і т. д.

Вивченню дії віднімання від'ємних чисел передує повторення означення віднімання додатніх чисел: «Відняти від числа a число b — значить знайти таке число c, яке в сумі з b дає a». Спочатку це означення повторюють на числових прикладах, а потім формулюють в загальному вигляді. При цьому учні пригадують, що смисл означення віднімання полягає в знаходженні доданка, якщо задані сума і другий доданок.

Таке повторення підготовляє до осмислення дії віднімання від'ємних чисел. Далі повідомляється учням, що віднімання від'ємних чисел має той самий смисл, що й віднімання додатніх чисел, тобто за даною сумою і одним з доданків знаходять другий доданок.

Розглянемо суму: $16 + 8 = 24$.

Щоб знайти доданок 16, треба від суми 24 відняти другий доданок 8: $24 - 8 = 16$.

Але цей самий результат можна одержати, якщо до 24 додати -8, число протилежне 8, тобто 1) $24 + (-8) = 16$.

Розглянемо ще кілька прикладів:

2) $-18 + (-8) = -26$;

3) $-18 + (-3) = -21$;

4) $-15 + (-20) = -35$.

Знаходження одного з доданків у прикладах 2—4 супроводжується міркуванням, яке аналогічне розв'язанню прикладу 1. Після розгляду цих прикладів учні під керівництвом учителя приходять до висновку і формулюють правило віднімання для двох будь-яких чисел.

Як бачимо, на даному прикладі повторення означення віднімання додатніх чисел знаходиться в безпосередньому взаємозв'язку з вивченням нового матеріалу, відніманням від'ємних чисел.

При розв'язуванні рівнянь у V—VI класах новим способом необхідно повторити відомості з початкової школи про знаходження неві-

домих компонентів. При цьому учням можна запропонувати розв'язати такі приклади:

$$x + 25 = 9;$$
$$22 = y - 8;$$
$$-9x + 30 = x.$$

На уроках математики формується поняття числового значення величини, вивчаються властивості величин і чисел. Перед розглядом цих питань корисно повторити з учнями властивості величин і чисел, раніш вивчених. Таким чином, **повторення на етапі підготовки до вивчення нового** матеріалу необхідно для встановлення зв'язків нового матеріалу з раніш вивченим, невідомого з відомим. Таке повторення сприяє систематизації матеріалу, глибшому розумінню його, формуванню міцних знань.

4.2. **Повторення як спосіб формування навичок. Повторення при підготовці учнів до виконання різних вправ,** практичних і лабораторних робіт, розв'язування прикладів і задач сприяє формуванню міцних навичок.

Вони формуються цілеспрямовано і усвідомлено. Спочатку учень спирається на якесь правило, а потім виконує відповідну дію без особливих зусиль. К. Д. Ушинський писав, що математична дія повинна бути цілком усвідомлена учнем, а потім шляхом вправ вона повинна перетворитися в «напівсвідомий» навик, щоб учень розв'язуючи яку-небудь задачу, «не витрачав свідомості і волі» на пригадування арифметичних дій.

В процесі навчання математики важливе місце відводиться формуванню обчислювальних навичок, навичок вимірювання, побудови, застосування знань при розв'язуванні різного виду вправ, практичних і лабораторних робіт, на практиці, в житті.

Поруч з повторенням, яке передує (випереджає) пояснення нового матеріалу, розв'язування задачі, виконання практичної роботи, проводиться **повторення при закріпленні нового матеріалу уроку**. Таке повторення поєднується з закріпленням і спрямовано на узагальнення вивченого, виділення головного. Так, перед виконанням вправ на закріплення поняття «вектор» повторюється означення цього поняття, його смисл.

Вправи для повторення, що призначені для самостійної роботи на етапі закріплення, за своєю формою можуть бути програмованими. Наведемо приклад програмованих завдань з теми «Вектори» в курсі геометрії.

Завдання 1.

Скільки різних векторів зображено на кожній фігурі (рис. 56) — позиції *а*, *б*, *в* відповідно?

1) Один	1) Чотири	1) Два
2) Два	2) Три	2) Чотири
3) Три	3) Два	3) Один
4) Чотири	4) Один	4) Три

При обговоренні результатів виконання самостійних робіт ще раз звертається увага на істотні ознаки поняття «вектор».

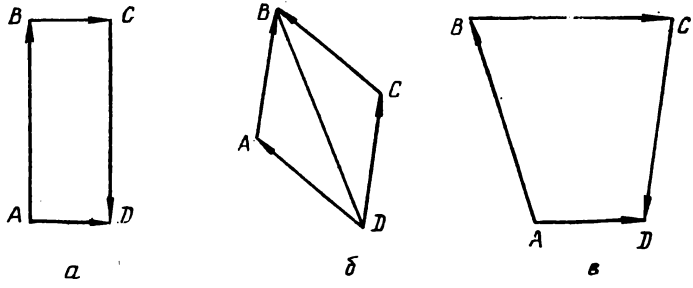


Рис. 56

При закріпленні поняття «симетричні фігури» учням задають вправи, для виконання яких потрібно повторити основні ознаки, властивості поняття.

Завдання 2.

1. Укажіть фігури (рис. 57), які мають спільну властивість. Яка ця властивість? Які фігури не мають цієї властивості? Обгрунтуйте відповідь.

2. Накресліть фігуру, яка має: а) дві, б) три осі симетрії.

3. Наведіть приклад фігури, яка має нескінченну множину вісей симетрії.

Під час проведення підсумків виконання самостійної роботи на уроці учні ще раз повторюють істотні ознаки симетричних фігур, їх властивості, що сприяє закріпленню цього поняття.

Таким чином, у цьому випадку повторення матеріалу проводиться на етапі закріплення.

Для формування міцних знань, уміння застосовувати ці знання при розв'язуванні прикладів і задач, закріпленні обчислювальних навичок значне місце відводиться організації поточного повторення, не пов'язаного з матеріалом, що вивчається на уроці.

Так, в VI класі на одному з уроків за темою «Розв'язування рівнянь» проводиться усна самостійна робота:

а) $16 : 0{,}01$; $15 \cdot 0{,}1$; $15 : 0{,}01 - 5000 \cdot 0{,}1$; $600 \cdot 0{,}01 + 0{,}1 : 0{,}01$;

б) знайти 50 % від 8, 25 % від 12, 250% від 10;

в) розв'язати рівняння $9x = 8x + 10$; $3x - 10 = 4x - 15$; $(x - 2) \cdot (x - 0{,}5) = 0$.

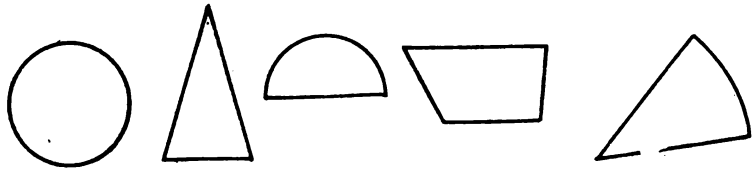


Рис. 57

Як бачимо, завдання «а» і «б» не зв'язані безпосередньо з матеріалом, що вивчається на уроці, але вони мають неабияке значення для закріплення обчислювальних навичок.

Виконання учнями тренувальних вправ на дії з десятковими дробами і повторення правил множення, ділення десяткових дробів сприяють закріпленню знань, що їх мають учні, формуванню міцних навичок.

Для кожного виду повторення учитель математики складає до початку навчального року план повторення, дібравши для цього теоретичний матеріал, відповідні приклади і задачі.

Під час підготовки до уроку вчитель планує повторення матеріалу з теми попереднього уроку, з вивченої теми або розділу програми.

Повторення в кінці теми або курсу має оглядовий характер і сприяє систематизації знань з теми, курсу.

На закінчення вивчення матеріалу з теми можна провести оглядове повторення, наприклад, з тем «Рівні дроби», «Додавання і віднімання дробів», заздалегідь підготувавши відповідні питання. Результати повторення можна підсумувати після проведення оглядової контрольної роботи:

1. Сформулюйте головну властивість дробу. Наведіть приклади.
2. Зведіть дроби $\frac{3}{7}$ і $\frac{4}{9}$ до знаменника 63.
3. Скоротіть дроби $\frac{12}{80}$ і $\frac{19}{57}$.
4. Наведіть приклади простих чисел.
5. Розкладіть на прості множники кожне з чисел: 24, 49, 60.
6. Накресліть фігуру, яка має вісь симетрії.
7. Наведіть приклади найменшого спільного кратного двох чисел.
8. Знайдіть найменше спільне кратне чисел 48 і 72.
9. Зведіть дроби $\frac{11}{12}$ і $\frac{7}{8}$ до найменшого спільного знаменника.
10. Порівняйте числа

а) $\frac{9}{13}$ і $\frac{10}{11}$; б) $\frac{5}{18}$ і $\frac{7}{27}$.

11. Виконайте дії:

а) $\frac{6}{9}-\frac{7}{12}$; б) $\frac{7}{12}-\frac{5}{9}$; в) $-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}$; г) $-\frac{3}{5}-\frac{7}{10}$.

12. Розв'яжіть рівняння $x+7\frac{2}{7}=20$.

13. Виконайте дії $8\frac{7}{12}-\left(4\frac{7}{16}-1\frac{5}{12}\right)$.

14. Спростіть вираз $-5\frac{1}{3}x-\left(4-\frac{1}{9}y+4-\frac{2}{3}x\right)$.

Наступний етап повторення навчального матеріалу має характер підготовки до виконання роботи над помилками. З метою організованого повторення навчального матеріалу на початку року досвідчені вчителі проводять контрольні роботи вже у вересні. Такі роботи можуть співпадати з контрольними роботами з математики, які проводились для цих самих учнів в кінці попереднього навчального року.

Наслідки проведення роботи дозволяють вчителю спланувати питання для поточного повторення матеріалу на початку навчального року.

Учителі відмічають особливе значення повторення матеріалу на початку року. Наприклад, на перших уроках стереометрії в X класі повторення опорних знань з планіметрії сприяє засвоєнню нових знань.

Таким чином, на всіх етапах організації процесу навчання математики повторення має велике значення. Ніякий творчий досвід не можна здійснити без опору на попередній досвід.

Повторення навчального матеріалу є одним з засобів розвитку творчої активності учнів, помітного покращання якості математичної підготовки, боротьби з формалізмом у знаннях учнів.

§ 5. ПОПЕРЕДЖЕННЯ НЕУСПІШНОСТІ

Попередження неуспішності з математики є однією з умов здійснення загальної середньої освіти. Наука дидактика виходить з того, що кожна здорова дитина в умовах загальноосвітньої школи може оволодіти знаннями, уміннями, навичками, передбаченими навчальною програмою з математики.

Основними причинами неуспішності учнів з математики є слідуючі:

1. Наявність прогалин у фактичних знаннях, через що учень не може сформулювати означення поняття, теореми, істотні ознаки понять, їх властивості і т. д.

2. Наявність прогалин в умінні застосовувати фактичні знання на практиці, під час доведення теорем, при розв'язуванні задач.

3. Наявність прогалин в уміннях і навичках обчислювального характеру, уміннях побудови схем, виконання графічних робіт, використання інструментів і т. д.

4. Недостатній рівень розвитку самостійності, уваги, наполегливості, що не дає змоги учневі приступити до роботи або успішно довести свою роботу до кінця.

5.1. Заходи з подолання неуспішності. Попередження неуспішності обумовлюється системою організованої роботи всього класу в цілому і кожного учня зокрема на уроці і дома. Роботу з попередження неуспішності учнів з математики вчитель будує, по-перше, на основі вивчення і приймання заходів попередження помилок, що їх допускають школярі в процесі засвоєння загальноосвітніх знань, і, по-друге, на основі оволодіння типовими прийомами самостійної діяльності.

Таким чином, важливою умовою попередження неуспішності з математики є **систематичне, послідовне вивчення кожним учнем класу програмового матеріалу**. В математиці, як ні в якому іншому навчальному предметі, всі питання, що вивчаються, знаходяться в тісному взаємозв'язку. Так, неможливе вивчення дій над раціональними числами без засвоєння операцій над натуральними числами. Вивчення дій віднімання і додавання, множення й ділення теж неможливе без тісного взаємозв'язку вказаних питань.

Підготовча робота до вивчення нового матеріалу (з метою попередження неуспішності) готує учнів до оволодіння матеріалом, полегшує сприймання нового теоретичного матеріалу або нових прийомів розв'язування прикладів і задач.

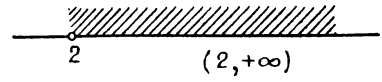


Рис. 58

В залежності від мети уроку вчитель використовує різні прийоми встановлення зв'язку нового матеріалу з раніш вивченим. Так, досвідчені вчителі використовують постановку питань, самостійну роботу з підручником, розв'язування задач, порівняння понять і т. д. У таких самих цілях важливе значення має поєднання на уроці загальнокласної, групової та індивідуальної роботи.

Під час первісного застосування учнями нового матеріалу в них можуть виникнути труднощі. Щоб попередити виникнення помилок на цьому етапі (навчання учнів), велике значення мають самостійні роботи за зразком. Демонстрування зразка розв'язування задачі, оформлення її запису, доведення теореми і т. д. може здійснити сам учитель або учень, який уже засвоїв новий матеріал і може виконати роботу. Зразок для всіх учнів можна показати на дошці. Зразок розв'язання задачі для окремих учнів можна дати на картці.

Приклади карток для учнів.

Картка А

1. Прочитайте в підручнику параграф «Розв'язування лінійних нерівностей з однією змінною».

2. Запишіть в зошит зразок запису ров'язання нерівності.

Зразок розв'язання нерівності:

$5x + 1 > 11$; $5x > 11 - 1$; $5x > 10$; $x > 2$.

Відповідь: $(2; +\infty)$ (рис. 58).

3. Виконайте завдання за зразком:

а) $9x + 2 > 18$; б) $3x - 2 < 6$; в) $12x < 18$.

Під час виконання цього завдання діяльність проходить на основі простого відтворення. Однак такі вправи необхідні, вони сприяють формуванню уміння розв'язувати нерівності, що дуже важливо в подальшій роботі при вивченні цієї теми.

Велику увагу слід приділяти підбору спеціальних вправ, які попереджують виникнення труднощів. Так, при вивченні теми «Степені з натуральним показником» в VII класі досвідчені вчителі знають типові помилки учнів:

1) «$a^n + a^m = a^{n+m}$»; 2) «$-5^2 = 25$»; 3) «$3 \cdot 4^2 = 144$».

Уникнути можливих помилок допоможуть такі вправи:

I. 1. Запишіть у вигляді добутку степінь: x^2; $(-a)^4$; $(36)^3$.

2. Запишіть у вигляді степеня з основою x:

а) $x \cdot x^5$; б) $a^2 \cdot a^4$.

Зразок: $x^2 \cdot x^3 = (x \cdot x) \cdot (x \cdot x \cdot x) = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = x^5$.

II. Порівняйте вирази:

а) 2^{2+3} і $2^2 \cdot 2^3$; б) 2^{2+3} і $2^2 + 2^3$.

III. Запишіть у вигляді добутку і обчисліть:
а) $(-2)^4$; б) -2^4; в) $(3 \cdot 2)^2$; г) $3 \cdot 2^2$.

З метою попередження труднощів учителі проводять додаткові заняття, індивідуальні консультації, організується товариська взаємодопомога.

Попередженню неуспішності сприяє своєчасна допомога учням. З цією метою досвідчені вчителі ведуть зошити обліку знань учнів. На кожного учня відводиться сторінка, на якій відмічаються:

1) прогалини в знаннях з окремих тем;
2) заходи для ліквідації прогалин:
   а) індивідуальні завдання і терміни їх виконання;
   б) облік відвідування консультацій;
3) результат роботи учня:
   а) якість засвоєння навчального матеріалу,
   б) що не виконано.

Слід зауважити, що оцінки в такий зошит не виставляються, а відмічається просування знань учня в процесі індивідуальної роботи з ним. Такі записи стимулюють діяльність школярів. Необхідно й доцільно проводити підсумки такої діяльності. Про наслідки засвоєння кожним учнем тих чи інших розділів програми вчитель робить висновки, керуючись підсумками перевірних робіт.

Результати проведених самостійних робіт орієнтують учителя на повторення конкретного матеріалу фронтально з класом і індивідуально з окремими учнями.

Для попередження неуспішності з математики велике значення має робота по закріпленню матеріалу. Для формування певних умінь застосування нових знань на практиці кожен учень виконує необхідну для нього кількість тренувальних вправ.

Так, після пояснення учителем правила множення десяткових дробів і виконання вправ виду

1) $15 \cdot 23$; $1{,}5 \cdot 2{,}3$; 2) $2{,}65 \cdot 3{,}6$; $0{,}35 \cdot 3{,}6$

можна запропонувати учням для самостійної роботи заповнити таблицю:

x	0,1	0,01	0,001
$6{,}35 \cdot x$			
$x \cdot 3{,}6$			

При виконанні подібних тренувальних вправ формується навик множення десяткових дробів, звертається увага учнів не на обчислення з натуральними числами, а на зв'язок, що існує між виконанням дії над натуральними числами і десятковими дробами.

Після виконання учнями роботи і перевірки її результатів доцільно ще раз зосередити увагу на алгоритмі виконання дії множення з десятковими дробами.

Другою важливою умовою попередження неуспішності з математики є **оволодіння кожним учнем необхідними прийомами самостійної роботи**. Наприклад, коли учень допускає помилки, але може самостійно розібратися з цим матеріалом, вчитель радить звернутися до пояснюючого тексту підручника. Інколи вчитель роз'яснює частину матеріалу, розглядаючи дві-три вправи на дошці, а після того, як стає зрозуміло, що учні можуть справитися, їх залучають до виконання тренувальних вправ. Іноді вчителі пропонують для розв'язування вправи обов'язкові і необов'язкові, вправи, які містять інструкцію до роботи. Так, для організації роботи з навчальною літературою пропонуються такі картки-завдання:

1. Прочитайте заголовок.
2. Прочитайте текст. Чи знаєте ви значення кожного слова? Якщо ні, то запитайте (учителя, товариша).
3. Якщо в тексті є задача з розв'язанням, уважно розберіть її.
4. Складіть аналогічну задачу.
5. Повторіть формулювання означень нових понять. Наведіть приклади.

Таким чином, робота в попередження неуспішності залежить від особливостей конкретного навчального матеріалу. Продумане вчителем і методично правильно організоване вивчення конкретних питань навчальної програми, залучення кожного з учнів до активної участі в роботі, уважне відношення до учнів сприяє глибшому засвоєнню ними навчальної програми з математики. Але в кожному випадку необхідно створювати сприятливу атмосферу у відношенні до учнів. Важливо, щоб організація роботи сприяла розвитку самостійності, позитивного відношення до вивчення математики, до навчання взагалі.

Треба відмітити, що проблема попередження неуспішності учнів з математики досить серйозна і досвідчені вчителі на практиці знаходять ефективні шляхи її розв'язання. Однією з умов успішної роботи вчителя математики є постійне вивчення рівня підготовленості самих учнів, їх інтересів, вивчення досвіду роботи передових учителів.

§ 6. ІНДИВІДУАЛІЗАЦІЯ І ДИФЕРЕНЦІАЦІЯ У НАВЧАННІ

6.1. Зацікавленість суспільства у створенні оптимального режиму для виявлення і розвитку нахилів школярів. Необхідність диференціації навчання в середній загальноосвітній школі на даному етапі розвитку нашого суспільства викликана слідуючими обставинами:

прагнення суспільства до найбільш раціонального використання потенціальних можливостей кожного його члена, що зв'язано з виявленням і максимальним розвитком природних нахилів і здібностей учнів;

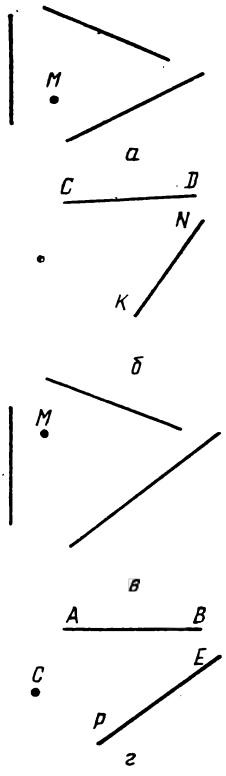


Рис. 59

турботою суспільства про всебічний розвиток особистості і максимальне задоволення її інтересів;

вимогою суспільного виробництва щодо підвищення рівня спеціальної підготовки робітників і інженерів;

необхідністю дальшого удосконалення реформ середньої школи [10, с. 269].

Слід відмітити, що в умовах класно-урочної форми навчання рівень викладу матеріалу, темп, розрахований на середнього учня, не відповідають пізнавальним можливостям учнів з уповільненим темпом засвоєння і учнів з добрими здібностями до вивчення математики: перші відчувають зростаючі труднощі, а другі працюють без особливої напруги.

У зв'язку з цим великої уваги заслуговують ті засоби, які надають можливість учням в умовах класно-урочної форми навчання проявити свої здібності і досвід.

У зв'язку з необхідністю удосконалення методів викладання математики все більшого поширення одержала диференціація навчання на уроці. Це дозволяє створювати оптимальні умови для проявлення здібностей і інтересів учнів в умовах колективної роботи.

З психології відомо, що учні відрізняються своїми нахилами, типами пам'яті, темпом роботи, мисленням, особливостями сприймання матеріалу. Диференціація навчання дозволяє вибрати такі методи, засоби навчання, які сприяють максимальному розвитку всіх учнів. Так, широко застосовуються самостійні роботи за варіантами, що відрізняються складністю змісту і розраховані на різні рівні підготовленості учнів, їх самостійності.

Методичні посібники, дидактичні матеріали містять самостійні і контрольні роботи, які відповідають різному рівню підготовленості учнів одного й того ж класу. Наприклад, у V класі під час проведення самостійної роботи одну із задач пропонують в різних варіантах кільком групам учнів.

Розглянемо приклад двох варіантів.

Варіант 1

1. Проведіть через точку M прямі, перпендикулярні до кожної з трьох прямих (рис. 59, *а*).

2. Через точку A проведіть пряму AB, перпендикулярну до прямої CD, і пряму AP, перпендикулярну до прямої KN (рис. 59, *б*).

Варіант 2

1. Проведіть через точку M прямі, перпендикулярні до кожної з трьох прямих (рис. 59, *в*).

2. Через точку C проведіть пряму CD, перпендикулярну до прямої AB, і пряму CK, перпендикулярну до прямої PE (рис. 59, *г*).

Як бачимо, виконання інших завдань в кожному з варіантів вимагає від учнів більш складних умінь, кмітливості, яка полягає в тому, що для побудови необхідно продовжити прямі і лише тоді провести до них перпендикуляри. Звичайно, в практиці застосовуються три-чотири варіанти.

При організації диференційованих самостійних робіт є труднощі вибору підстав для поділу учнів даного класу на групи. Тому краще, коли це питання учні розв'язують самостійно.

Основним принципом диференціації повинно бути не систематичне спрощення змісту освіти, а диференціація допомоги учням з боку вчителів.

На практиці застосовуються картки-консультації, в яких вказують план розв'язування задачі; в інших картках пропонують схему, графік, аналогічну задачу, або здвоєні задачі. В результаті всі учні розв'язують одну й ту саму задачу, але розв'язування ділиться на проміжні етапи, або кроки, які передбачають надання необхідної допомоги тому, хто розв'язує.

Для більш сильних учнів класу пропонуються додаткові завдання підвищеної трудності, приклади яких є в підручниках з математики.

6.2. Розв'язання проблеми індивідуалізації навчання. Індивідуалізація навчання математики передбачає органічну єдність індивідуальної і колективної діяльності школярів. При організації пізнавальної діяльності учнів ведуча роль належить учителю. Він спрямовує діяльність учнів, керуючись навчальними програмами. На всіх етапах класно-урочної форми навчання учитель виступає як керівник пізнавальної діяльності колективу і кожного з учнів у цьому колективі. Учитель у відповідності з завданнями навчання і виховання сам обирає сукупність різних прийомів, засобів для організації пізнавальної діяльності учнів з метою підвищення самостійності і творчої активності кожного з них.

Завдання учителя — організувати процес навчання таким чином, щоб в учнів зростали інтерес до знань, потреба в більш повному і глибокому засвоєнні, розвивалась самостійність в роботі, щоб кожен учень брав активну участь, працював з повною напругою своїх сил, щоб самостійна робота сприяла глибшому засвоєнню програмового матеріалу, формуванню більш міцних умінь і навичок, розвитку різноманітних здібностей учнів.

Однією з найважливіших умов, які сприяють успішному розв'язуванню завдань, є застосування в процесі навчання учнів індивідуальних самостійних робіт. Окремі учні класу можуть виконувати завдання, які в достатній мірі враховують їх індивідуальні особливості, інтереси. В теорії є різні підходи до поняття індивідуальної роботи.

Індивідуальна самостійна робота — це робота, яка індивідуалізована або за змістом, або за способами виконання, або одночасно за змістом і за способами виконання.

Якщо в класі виконуються завдання, індивідуалізовані тільки за способами їх виконання, всі учні можуть одержати одне й те ж завдання, наприклад розв'язати задачу, виконати практичну роботу, написати твір і т. д. Це самостійна робота, індивідуалізована за способами виконання її учнями, тобто одержане завдання для самостійної роботи кожний учень може виконати у відповідності з своїм життєвим і навчальним досвідом, рівнем підготовленості, здібностями.

При індивідуалізації самостійних робіт тільки за змістом окремі учні класу одержують завдання, яке за змістом відображає їх інтереси, але виконують його тим самим способом, що й останні учні класу. Такі роботи необхідні, вони мають на меті розвиток інтересу учнів до предмету і можливі при формуванні в них певних умінь, навичок, наприклад умінь розв'язувати задачі за допомогою складання рівнянь. Питання про організацію індивідуальних самостійних робіт окремих учнів невіддільне від організації робіт колективу учнів в цілому. Учитель може запропонувати індивідуальні завдання як окремим учням, так і кожному з учнів класу, роздавши заготовлені для цього картки.

Диференціація і індивідуалізація навчання означає пристосування не цілей і змісту навчання й виховання до індивідуальних здібностей дітей, а навпаки, методів і форм роботи до цих особливостей, з тим щоб успішно реалізувати загальне для всіх завдання виховання і освіти.

У зв'язку з завданням розвитку здібностей, підвищення самостійності і творчої активності кожного учня індивідуальні самостійні роботи все більш широко застосовуються в практиці нашої школи. Характер індивідуальної роботи повинен бути таким, щоб якомога більше учнів класу (або всі) мали можливість її виконувати, а вчитель мав змогу організувати таку роботу. Ефективність індивідуальних самостійних робіт окремих учнів залежить від різних умов, в тому числі і від поєднання її з іншими видами самостійної роботи.

6.3. Форми диференційованого навчання з математики. Найбільш поширені математичні гуртки, лекторії, факультативні заняття за вибором, класи з поглибленим вивченням математики.

Математичні гуртки, факультативи — це найбільш рухомі форми диференціації навчання учнів за їх інтересами і можливостями. Шляхи індивідуалізації і диференціації навчання математики різноманітні, і вибір їх учителем залежить від конкретних умов, особливостей класу в цілому, індивідуальних здібностей учнів, специфіки навчального матеріалу і ін. Різні види індивідуальних завдань можна знайти в методичних посібниках, дидактичних матеріалах, що видаються.

§ 7. ПЕРЕВІРКА ЗНАНЬ, УМІНЬ І НАВИЧОК УЧНІВ З МАТЕМАТИКИ

Перевірка знань, умінь і навичок є важливою складовою частиною процесу навчання. Визначення рівня засвоєння учнями навчального матеріалу, оцінка їх знань і умінь, виявлення рівня розумового розвитку і розвитку індивідуальних здібностей — необхідна сторона навчального процесу, яка утворює внутрішній зміст кожної його лан-

ки. Головною метою перевірки є визначення якості засвоєння учнями програмового матеріалу, діагностування і коректування їх знань і вмінь, виховання відповідальності за навчальну роботу. Перевірка знань учнів є досить складний і вкрай тонкий процес в теоретичному і в методичному аспектах його практичних розробок, в психологічному і організаційному відношеннях. Це пов'язано з тим, що перевірка має своїм завданням одержувати і збирати об'єктивну інформацію для успішного керівництва навчанням, розвитком і вихованням школярів.

7.1. Функції перевірки. Для з'ясування ролі перевірки в процесі навчання математики розглянемо її найбільш значимі функції: контролюючу, навчаючу, діагностичну, прогностичну, розвиваючу, орієнтуючу і виховну.

Контролююча функція полягає у виявленні стану знань і вмінь учнів, рівня їх розумового розвитку, у вивченні міри засвоєння прийомів пізнавальної діяльності, навичок раціональної навчальної праці. За допомогою контролю визначається вихідний рівень для дальшого оволодіння знаннями, уміннями і навичками, вивчається глибина і обсяг їх засвоєння, порівнюється те, що планується, з дійсними результатами. На цій самій основі встановлюється ефективність методів, форм і засобів, які використовує вчитель в процесі навчання.

Навчаюча функція перевірки сприяє удосконаленню знань і вмінь, їх систематизації. Наприклад, формування навичок самоконтролю здійснюється перш за все через перевірку вчителем дій учня. В процесі перевірки учні повторюють і закріплюють вивчений матеріал. Вони не тільки відтворюють раніш вивчене, але й застосовують знання і вміння в новій ситуації, мобілізують відповідні способи розв'язування задач, відповідні прийоми навчально-пізнавальної діяльності.

Перевірка допомагає учням виділити головне, основне в тому, що вивчається, уточнити зміст питання, яке розглядається, зробити контролюючі знання і вміння більш виразними, точними і дійовими. Перевірка сприяє узагальненню і систематизації знань, формуванню відповідних даному етапові вмінь і навичок.

Діагностична функція перевірки дає змогу одержати інформацію про помилки, недоліки і прогалини в знаннях і вміннях учнів та причини, що їх породжують. Тут важливо також виявити міру впливу цих причин на якість знань, умінь і навичок школярів.

За результатами діагностичних перевірок можна прогнозувати початок труднощів учнів у оволодінні навчальним матеріалом, кількість, характер і причини помилок, що дозволяє вибрати найбільш дійовий індивідуальний підхід, акцентувати увагу на підбір достатньо повної системи вправ, більш дійової методики навчання і в загальному плані уточнити напрям дальшого удосконалення змісту, методів і засобів навчання.

Прогностична функція перевірки має своїм завданням одержання випереджуваної інформації про навчально-виховний процес. Внаслідок такої перевірки одержують підстави для прогнозу про хід певного відрізка навчального процесу: чи достатньо сформовані конкретні знання, уміння і навички для засвоєння наступної порції навчального

матеріалу (розділу, теми). Результати прогнозу використовують для створення моделі дальшої поведінки учня, який допускає сьогодні помилки даного типу або має певні прогалини в системі прийомів пізнавальної діяльності. Прогноз в багатьох відношеннях сприяє одержанню правильних висновків для наступного планування і здійснення навчального процесу.

Прогноз допомагає уточнити особливості засвоєння учнями навчального матеріалу, його значення для дальшого оволодіння програмовим матеріалом, провести з учнями достатню підготовчу роботу, приділити увагу розвитку їх пізнавальних здібностей та інтересів.

Розвиваюча функція перевірки полягає в стимулюванні пізнавальної активності учнів, у розвитку їх творчих сил і здібностей. В процесі перевірки розвивається мова, пам'ять, увага, уявлення, воля і мислення школярів. Перевірка робить великий вплив на розвиток і проявлення таких якостей особистості, як здібності, нахил, інтереси, потреби, відношення і ін. Перевірка, впливаючи на розвиток учнів, одночасно дає багату інформацію про рівень цього розвитку.

Орієнтуюча функція перевірки дозволяє одержати інформацію про ступінь досягнення мети навчання окремим учнем і класом в цілому — наскільки засвоєний і як глибоко вивчений навчальний матеріал. Перевірка орієнтує учнів у їх труднощах і досягненнях. Викриваючи прогалини, помилки й недоліки учнів, вона вказує їм напрями застосування сил з метою удосконалення знань і вмінь; допомагає учневі краще пізнати самого себе, оцінити свої знання і можливості. Перевірка орієнтує і вчителя у недоліках і досягненнях його викладання. Вона сприяє виявленню і узагальненню передового педагогічного досвіду і виконує також цілі державного контролю за роботою шкіл і вчителів.

Виховна функція перевірки полягає у вихованні в учнів відповідального відношення до навчання, дисципліни, охайності, чесності. Перевірка спонукає учнів більш серйозно і регулярно контролювати себе під час виконання завдань, стимулює виховання твердої волі, наполегливості, звички до систематичної праці.

Зазначені функції перевірки підкреслюють її роль і значення в процесі навчання. В навчальному процесі самі функції проявляються в різній мірі і в різних сполученнях. Це залежить в основному від цільового призначення і виду перевірки, що обумовлюється запланованими на даному етапі навчання дидактичними, розвиваючими і виховними цілями, які в конкретному виді перевірки втілюються у відповідних поєднаннях. Реалізація виділених функцій на практиці робить перевірку більш ефективною, а разом з нею ефективнішим стає і сам навчальний процес.

7.2. Принципи перевірки. Перевірка повинна бути цілеспрямованою, об'єктивною, всебічною, регулярною і індивідуальною.

Цілеспрямованість передбачає чітке визначення мети кожної перевірки. Постановка мети є ланкою, яка визначає всю наступну роботу в обгрунтуванні форм, методів і засобів перевірки. Цілі перевірки включають такі питання: що повинно перевірятися, хто повинен опитувати, які висновки можна буде зробити на основі результатів

перевірки, який очікується ефект від її проведення? Під час конкретизації питань виходять із цілей виховання, розвитку і навчання учнів що реалізуються на даному етапі навчання.

Об'єктивність перевірки попереджує випадки суб'єктивних і помилкових суджень, які перекручують дійсну успішність учнів та знижують виховне значення перевірки. Об'єктивність перевірки залежить від багатьох факторів: чітке виділення загальних і конкретних цілей навчання; розробленість вимог до знань, умінь і навичок учнів; обгрунтованість виділення і відбору об'єктів та змісту перевірки; адекватність завдань, що перевіряються, цілям перевірки; забезпеченість методами обробки, аналізу і оцінювання наслідків перевірки; організованість проведення перевірки і ін. Від рішення цих питань в багатьох відношеннях залежить об'єктивність і якість перевірки.

Всебічна перевірка — це охоплення багатого за змістом матеріалу: засвоєння основних ідей даного курсу і навчального матеріалу відповідних змістовних, стрижньових ліній курсу; знання учнями окремих і істотних фактів, понять, закономірностей, теорем, способів дій і способів діяльності. Зрозуміло, що при такій багатогранності матеріалу, що підлягає перевірці, ускладнюється методика складання завдань, тобто пред'являються підвищені вимоги до методики виділення і відбору об'єктів перевірки.

Регулярність — це систематична перевірка, яка органічно поєднується з самим навчальним процесом.

Індивідуальність перевірки вимагає перевірки і оцінки знань, умінь і навичок кожного учня.

7.3. Форми, види і методи перевірки. 1. У відповідності з формами навчання на практиці виділяють три форми перевірки: індивідуальна, групова (разом з різновидністю — ущільненим опитуванням) і фронтальна (разом з масовими перевірками).

Під час **індивідуальної** перевірки кожен учень одержує своє завдання, яке він повинен виконати без сторонньої допомоги. Ця форма перевірки доцільна в тому випадку, коли треба виявнити індивідуальні знання, здібності і можливості окремих учнів. Кожен учень показує результати самостійної розумово-практичної діяльності. Учитель встановлює правильність відповіді, її послідовність, повноту і глибину, самостійність суджень і висновків, ступінь розвитку логічного мислення, культури мови і т. п. Враховуючи значення і багатофункціональність перевірки, в практиці намагаються охопити індивідуальною перевіркою кожного учня класу, причому неодноразово. З попередньої практики відомі випадки, коли з метою економії часу не опитувались слабкі учні, внаслідок чого вони помітно відставали в своєму розвитку і часто ставали другорічниками. В зв'язку з цим індивідуальна перевірка завжди планується: учитель намічає, коли, кого з якою метою опитати, які для цього використати засоби.

В процесі **групових** перевірок клас тимчасово ділять на декілька груп (від 2 до 10 учнів), і кожній групі дається завдання. В залежності від мети перевірки групам пропонують однакові завдання або диференційовані: перевіряють результати письмовографічного завдання, яке учні виконували вдвох, або практичного, яке виконувала четвірка

учнів, або перевіряють точність, швидкість і якість виконання конкретного завдання (у формі дидактичної гри або змагання) за ланками. Групову форму організації застосовують при повторенні з метою узагальнення і систематизації навчального матеріалу, під час виділення прийомів і методів розв'язування задач, при акцентуванні уваги учнів на найбільш раціональні способи виконання завдань, на кращий з варіантів доведення теореми і т. п. Оцінювання в балах групової роботи виконується не завжди, інколи достатньо слова, відгуку, рецензії. Добре продумана групова перевірка створює сприятливі можливості для розвитку і виховання учнів.

Інколи групову перевірку проводять у вигляді ущільненого опитування, коли декілька учнів відповідають усно коло дошки або письмово за партами. Письмові завдання часто пропонують сильним учням з метою активізації їх діяльності або синтезування і систематизації навчального матеріалу, який (після обговорення одержаного результату в класі) буде активно використаний на уроці. При усній перевірці ефективним є опитування у ланці: одночасно викликають декількох учнів, які одержують завдання, логічно пов'язані між собою. Послідовна відповідь на них використовується усім класом для повторення матеріалу з розділу, що перевіряється.

При **фронтальній** перевірці завдання пропонують всьому класу. В процесі цієї перевірки вивчається правильність сприймання і розуміння навчального матеріалу, якість словесного, графічного, предметного оформлення, ступінь закріплення в пам'яті. Учителя цікавить свідомість у відповідях учнів, обгрунтованість і доказовість. Він спостерігає за охайністю виконання завдань, розкриває слабкі сторони в знаннях учнів, виявляє недоліки, прогалини, помилки в роботах і у відповідях учнів. Це дозволяє йому своєчасно намітити заходи, спрямовані на їх подолання.

2. Основними видами перевірки знань, умінь і навичок учнів з математики є поточна, тематична і підсумкова перевірка.

Поточна перевірка проводиться протягом всього навчання, на кожному уроці, причому майже на кожному його етапі. У поточній перевірці найбільш чітко проявляються всі її функції, що вимагає від учителя великої уваги, чуйності і тактовності: перевіряється правильність і осмисленість кожної практичної і пізнавальної дії учня, його вмінь проводити аналіз, обгрунтовувати здійснювані дії, виділяти істотне в навчальному матеріалі, диференціювати поняття, відтворювати етапи перетворень або доведень теорем, зберігати потрібне в пам'яті, переходити на мову геометричну (графічного зображення) або символічну і т. п. Поточна перевірка сприяє удосконаленню знань і вмінь.

Оцінювання при поточній перевірці має великий виховний вплив: об'єктивна оцінка може підтримати, підбадьорити учня, поспішно виставлена — затримати, затормозити. Взагалі оцінка вважається педагогічно правильною, якщо вона стимулює дальший розвиток учня. Тому при оцінюванні слабких учнів інколи використовують відсрочений контроль, коли оцінку виставляють їм після засвоєння знань,

що перевіряються (ефективність цієї ланки залежить і від уміння вчителя вести облік знань, умінь і навичок учнів).

При **тематичній** перевірці виясняється засвоєння учнями основних положень теми. Тут увага приділяється виявленню умінь учнів зв'язно і послідовно викладати засвоєний матеріал, узагальнювати, конкретизувати і систематизувати, застосовувати знання при розв'язуванні практичних і пізнавальних задач.

Проведення тематичної перевірки в багатьох відношеннях залежить від чіткого виділення в темі основних розділів або підтем. Кількість підтем визначає частоту цього виду перевірки, на практиці вона здійснюється через систему короткочасних контрольних або самостійних перевірочних робіт (всі останні самостійні роботи є суто навчаючими). На основі результатів тематичної перевірки, включаючи результати контрольної роботи з теми, виставляють оцінки за чверть, півріччя, навчальний рік.

Підсумкова перевірка має більш спеціалізований характер. Вона проводиться у формі екзаменів або річних контрольних робіт. На підсумкових іспитах перевіряються знання з найважливіших розділів і тем курсу або курсу в цілому: перевіряється підготовленість учнів до трудової діяльності або продовження навчання в старших класах, середніх спеціалізованих або вищих навчальних закладах. Підсумкові контрольні роботи розробляються районними або міськими відділами народної освіти, а екзамени проводяться за текстами або білетами республіканських міністерств народної освіти.

3. Серед методів перевірки (способів вивчення якості знань, умінь і навичок учнів) виділяють усну, перевірку письмово-графічних і практичних робіт.

Усна перевірка організовується по-різному: в залежності від її мети (реалізація певних функцій перевірки на уроці) і від змісту матеріалу, що перевіряється. Серед цільових установок перевірки можна виділити такі: перевірити виконання домашнього завдання, виявити підготовленість учнів до вивчення нового матеріалу, перевірити ступінь розуміння і засвоєння нових знань, вивчити рівні розвитку математичної мови, властивості і якості мислення, збереження вивченого в пам'яті, перевірити сформованість навчально-пізнавальних умінь і навичок і ін. В залежності від змісту вона проводиться з матеріалу попереднього уроку або з окремих розділів і тем курсу.

Методика усної перевірки складається з двох частин: а) складання питань та їх задавання; б) відповідь учнів на поставлені питання і її слухання.

Складання питань і завдань — важливий елемент усної перевірки. Якість питань визначається їх змістом, адекватністю виявлюваного, характером розумових дій, які учні виконують під час відповідей на питання, а також словесним формулюванням.

Під час складання питань завжди виходять із загальновідомого дидактичного положення про те, що перевірити слід ті знання, які є ведучими в даному курсі чи відносно важко засвоюються учнями або які необхідні для успішного засвоєння наступних розділів і тем курсу. На підбір питань впливає вид перевірки: для уточнення змісту питань,

призначених для поточної перевірки, необхідний аналіз зв'язків матеріалу, що вивчається, з матеріалом, раніш пройденим; для тематичної і підсумкової перевірки — виділення провідних знань і способів оперування ними. У всіх випадках усну перевірку вважають ефективною, якщо вона спрямована на виявлення осмисленості сприйняття знань і усвідомленості їх використання, а також якщо вона стимулює самостійність і творчу активність учнів.

Якість питання визначається і характером розумових дій учнів, які вони виконують під час конструювання відповідей. Тому серед питань, що підлягають перевірці, виділяють ті, які активізують пам'ять (на відтворення вивченого), мислення (на порівняння, співставлення, встановлення причинно-наслідкових зв'язків, виділення істотних ознак понять, доведення, узагальнення, класифікацію, конкретизацію і ін.), мову (для перевірки конкретних мовних навичок, умінь використовувати математичну термінологію) і ін. Велике значення мають проблемні питання і ті, які змушують застосовувати одержані знання в практичній діяльності: які факти можна довести, при наявності яких умов, для яких цілей, як можна здійснити, які є можливості, правомірність умовиводів.

Якість усної перевірки залежить від підбору, послідовності і постановки питань. У системі питань, що ставляться перед учнями, кожне повинно бути цілеспрямованим і логічно закінченим. Причому в одних системах на практиці часто виділяють основне питання, яке вимагає розгорнутої відповіді учня, і додаткові, які вимагають короткої відповіді, але дають змогу різноманітніше і якісно виявити знання учнів. В інших системах питання розміщують в такій послідовності, щоб відповідь на одне питання підготовляла учнів до відповіді на інше. Словесне формулювання питань також впливає на ефективність відповіді. Тому формулюють питання досить коротко, лаконічно і точно (не двозначно): учні повинні чітко знати, який матеріал слід викласти, які поняття, закони і способи дій розкрити. Самі питання промовляються голосно і виразно, навіть якщо їх запис проектують на екрані.

Другою складовою частиною усної перевірки є відповідь учнів на поставлені питання і слухання її. В дидактичній літературі виділяють дві можливості якісного виявлення знань: 1) учень вільно, без перешкод з боку вчителя і класу викладає знання з даного питання;2) створюються умови, які забезпечують найкращу роботу його інтелектуальних сил. В процесі перевірки вчитель і клас досить уважно вислуховують відповідь учня — всі зауваження і коментарії робляться після її закінчення. Відповідь можна перервати тільки в тому випадку, коли учень не відповідає на питання, а ухиляється від конкретної відповіді. Оцінюючи відповідь учня, звертають увагу на її правильність і повноту, на послідовність викладу, якість мови. Доброзичливий тон, витримка, віра в дітей, необхідна вимога — такі риси поведінки вчителя під час перевірки.

До основної інформації, яка оцінюється методом усної перевірки, належить слідуюча:

1) відповіді і повідомлення за домашнім завданням;

2) знання, уміння і навички з раніш вивченого матеріалу, якщо вчитель не впевнений у міцності його засвоєння;

3) знання з раніш вивченого матеріалу, якщо він активно буде використовуватися при введенні нових знань;

4) засвоєння учнями теоретичного матеріалу;

5) засвоєння умінь і навичок — способів дій і способів діяльності;

6) рівень розвитку математичної мови;

7) рівень розвитку логічного мислення учнів — уміння міркувати, робити висновки, доводи і обгрунтовувати свої дії;

8) рівень розвитку властивостей і якостей мислення.

Перелічені прийоми **усної перевірки** використовуються на різних етапах уроку, а їх вибір визначається його метою і логікою. Так, на етапі залучення учнів до уроку і підготовки їх до вивчення нового матеріалу у відповідному поєднанні і порядку активно використовуються прийоми перевірки домашнього завдання, розвитку властивостей мислення і мови, а також знань, умінь і навичок з матеріалу, що вивчався раніше, якщо він складає основу для введення нових знань. Інколи вчитель планує перевірку матеріалу, в міцності засвоєння якого учнями він не впевнений. При вмілій організації перевірки у формі, наприклад, усного рахунку, математичної розминки, математичного диктанту учні швидко «входять» в урок і успішно підготовляються до вивчення нових знань.

Відмітимо, що перевіряти якість домашньої роботи треба обов'язково: вона є дуже цінним видом самостійної роботи. Спочатку перевіряється виконання кожної частини домашнього завдання. В процесі перевірки практичних завдань учитель, звичайно, використовує такі питання: «Хто виконав завдання номер....?», «Яку одержано відповідь?», «Хто одержав інший результат?». Інформація про ступінь виконання кожного завдання (в деяких школах про неї доповідають чергові учні) і знання їх цільового призначення дозволять учителю правильно встановити необхідність перевірки якості виконання відповідного завдання (тоді учні відтворюють хід розв'язання, кожну дію коментують і обгрунтовують). Якщо додому було задано осмислення і запам'ятання важливого теоретичного матеріалу — основні поняття, правила, теореми, закони — і необхідно перевірити цілісність його сприйняття, вчитель використовує індивідуальну форму опитування. У цьому випадку перевірка проходить успішно, якщо вчитель створює обстановку інтересу до відповіді, пропонуючи учням бути рецензентами, коректорами або редакторами відповіді товариша.

На етапі ознайомлення з новими знаннями на уроці активно використовується перевірка засвоєння навчального матеріалу: вивчення рівня засвоєння теоретичного матеріалу, умінь, розвиток математичної мови, логічного мислення і ін. На цьому етапі учням задають питання в послідовності, яка відповідає розміщенню навчального матеріалу і більш наочному показу логіки даного навчального розділу. Учням пропонують також питання, за допомогою яких контролюють запам'ятовування матеріалу, точність мови, правильність суджень, і завдання — контрприклади. З метою перевірки засвоєння знань

і умінь пропонують завдання для усного розв'язування. Цей прийом ефективний тим, що сприяє розумінню і глибокому засвоєнню змісту нових знань і умінь.

На етапі закріплення знань і умінь використовують кожний прийом усної перевірки. За допомогою одних матеріал повторюють, уточняють, приводять в систему, закріплюють в пам'яті, мета інших — сприяти осмисленню і закріпленню зв'язку того, що вивчається з уже пройденим матеріалом. Така перевірка стає і дійовим методом навчання.

Перевірка письмово-графічних робіт має ті ж самі цілі, що й усна перевірка. Але цей метод має і свої якісні особливості: велика об'єктивність в порівнянні з усною перевіркою (без емоційного забарвлення відповіді і суб'єктивних перших вражень учнів і вчителя); охоплення потрібної кількості учнів, що підлягають перевірці; економія часу (при необхідності опитування всіх учнів за невеликий проміжок часу); можливість ранжирування учнів за рівнем засвоєння навчального матеріалу (при виконанні однакових завдань).

Дидактичні можливості методу письмової перевірки дуже великі. Саме за допомогою письмових робіт можна найбільш повно перевірити знання теоретичного матеріалу (знання означень, законів, правил, теорем, властивостей, ознак, вивчених доведень і ін.), уміння застосувати його до розв'язування задач (перетворення виразів, розв'язування рівнянь і нерівностей, знаходження похідних, обчислення інтегралів і т. п.), сформованість навичок (обчислювальні навички, навички розв'язування задач за допомогою рівнянь, навички побудови і аналізу графіків, схем, діаграм, таблиць, креслень), оволодіння прийомами навчальної роботи і ін.

Методика письмово-графічної перевірки вимагає особливої уваги до таких питань, як підготовка, організація, проведення і аналіз результатів. При підготовці основна увага приділяється встановленню мети перевірки, відбору змісту і об'єктів перевірки, складанню завдань для перевірки і самій перевірній роботі. Часто вид перевірки допомагає уточнити зміст цієї роботи, її цільове призначення. Велику допомогу в складанні письмово-графічних перевірних робіт надають навчально-методичні посібники «Книга для вчителя», «Дидактичні матеріали», які видаються для кожного класу, а також приклади перевірних робіт, що друкуються в журналі «Математика в школі».

Під час організації перевірної роботи учням повідомляють, в яких зошитах вони будуть її виконувати, які завдання для них підготовлені (на картках, з дидактичних матеріалів, на окремих бланках і т. д.). При необхідності учням дають вказівки, як виконати заголовок роботи, як оформити розв'язання (які дії слід обгрунтувати і де обмежитися констатуючими записами), а також повідомляють про тривалість виконання роботи. Слід забезпечити повну самостійність виконання роботи кожним учнем і необхідні для цього умови.

Найбільш важливою і відповідальною частиною письмово-графічної перевірки є виконання аналізу робіт учнем. Ретельно проведений аналіз дає змогу глибоко вивчити досягнення і прогалини окремих учнів, виявити причини останніх і намітити засоби їх усунення. Аналіз сприяє організації поточного і тематичного обліку знань і

вмінь учнів. Він тоді ефективний, коли проводиться за відповідними схемами, де зафіксована послідовність дій, які виконують учні під час розв'язання перевірних завдань. Схеми для поелементного аналізу виконання кожного завдання перевірної роботи розробляються різними способами. Подаємо один із важливих варіантів.

Припустимо, що до перевірної роботи включено завдання: «Побудуйте трикутник, симетричний даному відносно прямої, яка містить бісектрису кута трикутника». Спочатку складають оптимальний шлях розв'язування завдання. В даному випадку він такий:

1. Побудова трикутника ABC (позначення умовне).
2. Побудова бісектриси кута A — вісі симетрії l.
3. Побудова симетричних точок: $B_1 = S_l(B)$, $C_1 = S_l(C)$ і $A_1 = S_l(A)$.
4. Сполучення побудованих точок.

Тепер складається схема для аналізу виконання завдання:

1. Розпочинаю виконання даного завдання.
2. Побудував трикутник ABC.
3. Правильно побудував бісектрису кута A.
4. Правильно побудував симетричні точки:

а) правильно провів через точку пряму, перпендикулярну до вісі симетрії;

б) правильно відклав на прямій відрізки однакової довжини;

в) правильно побудував образ точки A.

5. Правильно виконав завдання (виділив і записав трикутник AB_1C_1).

При аналізі завдання за цією схемою з поля зору не випадають учні, для яких воно виявилося важким (не приступили до виконання завдання), а в останніх випадках чітко виділяються допущені помилки. Якщо результати перевірної роботи зафіксувати в прямокутну таблицю, в якій горизонтальні рядки відведені учням, а вертикальні — пунктам схеми аналізу, то огляд заповненої таблиці покаже картину виконання даного завдання (огляд таблиці за всіма завданнями роботи — рівень стану знань і умінь з розділу, який перевіряється).

Велике значення для практики навчання має аналіз за вищенаведеною схемою тематичних контрольних робіт. Ці роботи проводяться майже з кожного розділу навчального курсу: в кожному класі, починаючи з V, виконуються від 12 до 24 робіт протягом навчального року (результати робіт зберігаються в школах протягом всього навчального року). Дані аналізу використовуються для вивчення рівня засвоєння учнями змісту відповідного розділу, визначення якісних змін знань і умінь на протязі навчального року, розкриття динаміки їх засвоєння, розподілу навчального матеріалу за рівнем трудності засвоєння його розділів. Результати контрольних робіт можуть бути використані органами освіти для аналізу якості знань, умінь і навичок учнів, для створення «банку» педагогічної інформації, для виділення засобів дальшого удосконалення шкільного навчання.

Перевірка практичних робіт дає можливість одержувати дані про уміння учнів застосовувати набуті знання при розв'язуванні практичних задач, користуватися різними таблицями, формулами,

засобами малої механізації обчислювальних робіт, найпростішими електронними обчислювальними машинами, креслярськими і вимірювальними інструментами і приладами.

Вказаним методом перевіряються не тільки знання, відповідні уміння і навички, але й уміння і навички користування приладами, таблицями, інструментами та іншими засобами. Як наслідок учитель одержує звіт учня, в якому подається лише результат або схематично описані план практичної роботи та її результати. Це дещо утруднює перевірку і оцінку кожної дії учня. Тому на практиці в перевірні завдання «вкладають» алгоритм його виконання, що дозволяє здійснити перевірку правильності виконаних учнем дій.

У кожному класі, починаючи з V, протягом навчального року проводиться біля 10 практичних робіт. Ці роботи різнопланові: оглядові з пройденої теми, спрямовані на закріплення нових знань і формування практичних навичок, передуючі вивченню нового матеріалу. Всі роботи перевіряються, але оцінюються по-різному: за результатами оглядових робіт в журнал виставляють всі оцінки, за результатами тренувальних робіт — лише позитивні (останнім учням оцінки ставлять після одержання позитивного результату), наслідки робіт підготовчого характеру оцінюються рецензією учителя, де відзначаються точність і старанність виконання завдання та проявлена активність учня.

7.4. Засоби перевірки. До засобів перевірки відносятся питання, задачі та інші завдання, за допомогою яких виявляються знання, уміння, навички учнів. В теперішніх умовах створюються і розповсюджуються такі засоби машинної і безмашинної перевірки, які не потребують великої кількості часу на підготовку, проведення і обробку результатів. З машинних обладнань поширені класи автоматизованого контролю знань з застосуванням контролюючих засобів (АК, АМК-1, «Орленок», УГК, «Диск-18», «Ласточка» й ін.) або інформаційно-контролюючих (індивідуальні навчаючі машини і обладнання типу тренажів).

Контролюючі технічні засоби призначені для поточної і тематичної перевірки знань, умінь і навичок учнів. Вони сприяють організації фронтальної перевірки, оперативному одержанню інформації про ступінь розуміння і засвоєння певної частини навчального матеріалу, активізації розумової діяльності кожного школяра. За своїм принципом вони розраховані на використання різноманітних перевірних завдань, відповіді на які учні дають цілком без шифрування або з попереднім шифруванням у вигляді відповідної послідовності цифр. Найбільш активно використовуються перевірні завдання з вибором відповіді: учням пропонують завдання з декількома відповідями або результатами, серед яких вони вибирають правильний і вводять в контролюючий пристрій через пульт, який є на кожному учнівському столі. Запропоновані учням перевірні завдання або їх системи перед опитуванням попередньо записують на дошці або використовують спеціальні плакати чи кодопозитиви.

Деякі контрольно-навчаючі обладнання дають можливість кожному учневі проконтролювати правильність виконаних ним дій. Учні по-

рівнюють свої результати з відповіддю, попередньо закладеною вчителем у машину, що забезпечує організацію самоконтролю знань.

З машинних засобів перевірки активно використовуються короткочасні усні й письмові перевірні роботи, математичні диктанти, контрольні роботи на один або два уроки. Ці засоби перевірки добре розроблені і висвітлені в навчально-методичній літературі, в дидактичних матеріалах для вчителя. У комплекс засобів перевірки входять окремі питання, задачі і завдання, багато яких виготовляють у вигляді таблиць, карток-завдань з друкованою основою, матриць, завдань з вибором відповіді і т. п. Ці засоби перевірки розробляються для кожного класу і висвітлюються на сторінках методичної літератури.

Всі засоби перевірки, які є складовою частиною засобів навчання, покликані сприяти не тільки виявленню знань, а й організації їх засвоєння та керуванню навчально-пізнавальною діяльністю учнів. Тому одним з найголовніших завдань удосконалення методики перевірки, а отже, й методики навчання є оснащення навчального процесу ефективними засобами перевірки і методикою використання цих засобів на уроках математики.

§ 8. СПЕЦИФІКА ОРГАНІЗАЦІЇ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛІ ПРОДОВЖЕНОГО ДНЯ

Школа продовженого дня — це загальноосвітня школа, яка забезпечує значне зусилля суспільного виховання і всебічного розвитку дітей шляхом роботи з ними протягом всього дня і організації єдиного цілеспрямованого навчально-виховного процесу [14; 28].

Режим роботи таких шкіл характеризується особливостями, які впливають і на організацію навчання математики:

1. Увесь навчальний процес проходить у школі, а тому може бути забезпечений кваліфікованим керівництвом з боку вчителів і вихователів на всіх етапах діяльності учнів.

2. Організація процесу навчання в школі дозволяє використати всю матеріальну базу школи.

Проведення уроків математики можна планувати не тільки в кабінеті, а й в шкільних майстернях. Під час виконання домашніх завдань можна використати кабінети школи, бібліотеку, технічні засоби навчання і ін.

3. Режим навчальної діяльності в школах продовженого дня характеризується поділом процесу навчання в основному на дві організаційні форми: урок і позакласну роботу, яка включає самопідготовку.

Вся навчально-виховна робота проводиться педагогами, кваліфіковане керівництво яких дозволяє організацію, проведення уроків математики, позакласну роботу об'єднати в єдиний навчальний процес і передбачити різноманітні форми діяльності учнів з предмету.

Самопідготовка учнів проводиться в другій половині дня — у спеціально відведений час для виконання домашніх завдань.

8.1. Приблизна організація навчання математики в школі продовженого дня.

Перша половина дня

Урок математики під керівництвом учителя.

Основні етапи уроку:

1. Перевірка домашнього завдання.

2. Вивчення нового матеріалу.

3. Організація тренувальних вправ за зразком, даним учителем або вміщеним у підручнику, з метою первинного закріплення нових знань, формування умінь застосовувати ці знання при розв'язуванні задач.

4. Завдання для самостійної домашньої роботи, інструктаж учням для його виконання.

Друга половина дня

1. Обід, прогулянка.

2. Самопідготовка, виконання завдань.

3. Позакласні заходи: екскурсії, заняття математичного гуртка, лекції, консультації з математики.

І. Тема уроку: Введення поняття «процент».

План уроку

1. Повідомлення учителя про значення теми.

2. Повторення правил множення цілого числа на десятковий і на звичайний дроби (математичний диктант).

3. Самостійна робота з книгою за новим матеріалом. Введення поняття процента, розв'язування усних задач на знаходження процента від числа.

4. Виконання письмових вправ на застосування нового матеріалу.

5. Домашнє завдання. Пояснення завдань. Завдання диференційовані за складністю. Вони включають в себе такі вправи:

а) на знаходження проценту від числа;

б) повторення дій з десятковими дробами;

в) розв'язування задач підвищеної трудності на проценти;

г) додаткові задачі для сильних учнів (за бажанням).

6. Підсумок уроку. Оцінка роботи учнів.

ІІ. Самостійна робота з виконання домашнього завдання на тему «Проценти» (в спеціально відведений час для самостійної підготовки в другій половині дня).

ПЛАН ЗАНЯТЬ

1. Пояснення завдань. Зазначення способів самоперевірки.

2. Організація виконання завдань учнями, інструктаж, коректування і контроль з боку вихователя (учителя). Організація допомоги з боку більш сильних учнів.

3. Перевірка виконання роботи.

4. Індивідуальні консультації сильних учнів.

В школі з продовженими групами навчальний процес здійснюють два педагоги: учитель математики проводить урок математики, консультації з підготовки учнів до вивчення нового матеріалу, заняття математичних гуртків та інші форми; вихователь організує самостійну роботу учнів, спрямовану на виконання завдань. Здійснюючи

керівництво самостійною роботою з математики, вихователь знає тему, яку учні вивчали на уроці, номери пунктів і задач за підручником. Але вихователь не знає ступеня засвоєння нового кожним з учнів, не уявляє їх утруднень, недостатньо володіє сукупністю прийомів, які застосовує учитель математики. Ось тому необхідні спеціально розроблені завдання, методичні рекомендації на допомогу вихователю. Найбільш ефективними у цьому плані можуть бути програмовані завдання, коли вихователь здійснює контроль і перевірку правильності розв'язання.

З метою допомоги учням у самостійному виконанні завдань значне місце може бути відведено завданням з вказівками до розв'язання, шифрованим самостійним роботам.

Наприклад, під час перевірки уміння виконувати дії над натуральними числами пропонують такі самостійні роботи:

1) $47868 + 112812 = a$;
2) $a : 52 = b$;
3) $b + 27333 = c$,
4) $c - 18615 = \square$
5) $\square \cdot 3 = \square$.

Відповіді	1644	2447	3090	11455	160680	30423	11808	35424
Код	1	1	3	4	0	6	5	7

Якщо учень правильно виконає дії, результат знаходить у списку відповідей і переходить до виконання наступної дії. Якщо відповіді немає, дія виконана неправильно, отже учень повинен перевірити цю дію і знайти помилку.

Результат 160680 учень знаходить в рядку відповідей і виписує відповідно код «0». Так само робить і далі.

Виписуючи по черзі цифри зашифрованої відповіді кожної дії, учень одержує код результату розв'язання всіх прикладів.

Код відповіді: 03657.

Застосування таких завдань допомагає учневі організувати самоперевірку, вчасно звернутися за роз'ясненням до товариша або вчителя.

Однією з особливостей школи продовженого дня перш за все є **підсилення контакту вчителя з учнями.** Часто керівництво групами продовженого дня адміністрація школи намагається доручити вчителям, які ведуть уроки математики, української, російської мов та інших навчальних предметів. У цьому випадку з'являються додаткові можливості для спілкування учителя математики з своїми учнями.

Працюючи в групі продовженого дня, учитель математики має більшу можливість, ніж тільки на уроці, активізувати діяльність і концентрувати увагу школярів під час виконання ними самостійної роботи, попереджати появу помилок, привчати до систематичної роботи над виконанням завдань з математики, виховувати цілеспрямованість, ініціативність і відповідальність за доручену справу.

Робота вчителя на самопідготовці тісно пов'язана з його роботою на уроці. Учитель знає учнів, кому і як допомогти, може оцінити роботу кожного учня в цілому, проаналізувати свою роботу на уроці.

Звідси другою особливістю навчання математики в умовах школи продовженого дня є **підсилення індивідуалізації і диференціації навчання.** Під час виконання самостійної роботи вчитель надає диференційовану допомогу слабким учням, інструктує окремих учнів, спрямовує їх діяльність, постійно здійснює контроль. При цьому підвищується відповідальність і учителя за знання учнів, і самих учнів. За такої організації навчання учень уже не може прийти на урок з невиконаним домашнім завданням і одержати за нього двійку. В зв'язку з цим при навчанні математики вчитель проводить велику індивідуальну роботу.

В умовах організації навчальних груп продовженого дня при виконанні самостійної роботи учні одержують кваліфіковану допомогу з боку вчителя, мають можливість одержати консультацію з боку товаришів. Взаємодопомога дозволяє учням подолати труднощі, вона частіше, ніж в інших навчальних предметах, потрібна в математиці і корисна у виховному плані.

При цьому індивідуалізується і темп роботи учнів. У другої частини школярів звільняється час для навчальної роботи за інтересами, для розв'язування цікавих задач, читання науково-популярної математичної літератури.

Особливу увагу слід приділяти учням, які мають уповільнений темп роботи, і планувати їх роботу так, щоб вони встигали виконати її в школі. Учитель повинен строго стежити за тим, щоб не було перевантаження домашніми завданнями.

Наступною особливістю організації самостійних робіт у процесі навчання математики в школі продовженого дня є зміцнення їх практичної спрямованості творчими елементами, які сприяють розвитку дослідницької діяльності школярів.

Навчання математики в школі продовженого дня дозволяє організувати самостійну діяльність учнів у майстернях. Зв'язок з практикою підвищує інтерес учнів до математики, сприяє розвитку міжпредметних зв'язків.

Наприклад, уроку геометрії в VII класі за темою «Побудова трикутника за двома кутами і стороні між ними» може передувати практична робота в майстерні на уроці праці по виготовленню двох трикутників з фанери і картону, необхідних в майбутньому на уроці математики.

У VIII класі під час вивчення трапеції можна запропонувати завдання на знаходження в майстерні частин машин, деталей, які мають в перерізі форму трапеції, і виконання ескізів знайдених видів трапецій у зошиті.

У бібліотеці школи учні можуть прочитати історичний матеріал, що стосується вивченої теми, розв'язати старовинні задачі, головоломки, ознайомитися з новою літературою. Все це сприяє формуванню інтересу в школярів до навчання математики, підвищує рівень їх самостійності.

8.2. Форми навчання. Учителі, які працюють у групах продовженого дня, прагнуть організувати систематичну роботу школярів, зацікавити кожного з них творчими справами, шукають можливість задоволення їх інтересів.

У зв'язку з цим одержали визнання такі організаційні форми роботи:

а) урок математики;

б) самостійна робота по виконанню домашніх завдань під час самопідготовки;

в) консультації;

г) екскурсії;

д) математичні гуртки;

е) самостійна робота в бібліотеці з науково-популярною математичною літературою і ін.

Всі ці форми не нові, але в умовах школи нового типу їх вибір і організація є більш цілеспрямовані і розглядаються в тісному взаємозв'язку.

У школах продовженого дня урок як основна форма навчальних занять доповнюється різноманітною системою форм позакласних занять. Тут відбувається перенесення окремих видів діяльності учнів у більш сприятливі умови, які сприяють підвищенню ефективності засвоєння навчального матеріалу. Важливого значення набувають такі види робіт, як консультації викладачів або товаришів.

Консультації як організаційна форма навчальної діяльності учнів має цілеспрямований характер. Основне дидактичне її значення — аналіз пізнавального досвіду самим учнем, подолання труднощів з метою визначення напряму діяльності на глибоке вивчення окремих розділів шкільного курсу математики.

Причинами труднощів можуть бути недостатнє засвоєння матеріалу на уроці, прогалини в знаннях за попередні роки, невміння здійснювати перенесення різних способів діяльності в нові конкретні ситуації під час вивчення нового матеріалу і розв'язування задач.

Під час консультації вчитель пропонує учневі пояснити, де він шукав відповіді на питання, що виникали. Труднощі учнів можна подолати різними способами:

а) аналізом змісту прикладів і задач;

б) безпосереднім поясненням;

в) визначенням джерел, до яких повинен звернутися сам учень;

г) спільним обговоренням плану роботи під час поглибленого вивчення окремих питань програми.

Консультації з математики можуть мати індивідуальний, груповий або колективний характер в залежності від складності навчального матеріалу. В групи об'єднуються учні, які мають однакові прогалини в знаннях або проявляють інтерес до вивчення того чи іншого розділу, або взагалі до математики.

Під час індивідуальної консультації учень одержує рекомендації і допомогу. В індивідуальній бесіді учень розповідає про свої захоплення, намагається одержати підтримку, схвалення з боку вчителя, допомогу в розборці плану своїх дій. Поради вчителя допомагають

визначити йому напрям роботи, намітити шляхи досягнення результату при розв'язуванні задачі.

Змінюється місце (в системі навчання) функції перевірки і оцінки знань. Вони в даних умовах розширюються, наприклад, з метою формування в учнів уміння працювати ритмічно, систематично протягом довгого часу, уміння правильно розподіляти час.

Вибір форми роботи, їх поєднання залежать від характеру навчального матеріалу, дидактичних цілей уроку, вікових особливостей учнів і від умов організації навчання в групі продовженого дня.

За короткий час накопичено помітний досвід в організації навчального процесу.

Слід відмітити, що роботу з навчання математики необхідно розглядати як одну з важливих ланок комплексу всієї навчально-виховної роботи в школі продовженого дня.

§ 9. СПЕЦИФІКА НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ У ВЕЧІРНІЙ (ЗМІННІЙ) СЕРЕДНІЙ ЗАГАЛЬНООСВІТНІЙ ШКОЛІ

Всього у вечірніх школах існує чотири типи навчальних планів: для очної і заочної форм навчання, розрахованих на 36 тижнів; для очної в сільській місцевості і класів майстрів — на 28 тижнів. У вечірніх школах передбачена можливість навчання з V по XI, у класах майстрів — з IX по XI. У навчальних програмах значне місце відводиться математиці. Це зв'язано з тим, що навчання математики, як зазначено в шкільних програмах, покликано сприяти підвищенню загального культурно-технічного рівня робітничої молоді, більш глибокому розумінню ними техніки, технології і економіки свого виробництва, підвищенню виробничої кваліфікації і підвищенню продуктивності праці, розширенню творчої діяльності, активності та ініціативи в сфері раціоналізації виробництва, винахідливості, новаторства і застосування передових методів праці, продовженню навчання в середніх спеціальних і вищих навчальних закладах.

Програми з математики для вечірніх шкіл засновані на **базисній** програмі з математики. У програмах знаходять своє відображення провідні ідеї і методи сучасної математики. Вони враховують і специфічні особливості навчання молоді без відриву їх від виробництва: мають велику спрямованість на зв'язок навчання з трудовою діяльністю і професійними інтересами учнів, з їх життєвим і виробничим досвідом.

Програми з математики доповнюються навчально-методичною літературою для вчителя, дидактичними матеріалами і спеціальними навчальними посібниками для учнів вечірніх шкіл. Ці посібники в значній мірі сприяють самостійному оволодінню учнями програмовим матеріалом з математики. При заочній формі навчання помітну допомогу в організації вивчення матеріалу надають також «Завдання для учнів-заочників», які також систематично розробляються.

Навчальні заняття у вечірній школі проводяться в основному за класно-урочною системою. Відмінність в організації навчальної ро-

боти мають лише заочні школи, де основними формами занять є групові та індивідуальні консультації, виконання самостійних робіт і заліки. Навчальні заняття організовуються так, щоб під час вивчення математичного змісту в учнів формувалися уміння і навички раціональної навчальної праці. До вечірньої школи приходять учні, які мають різні рівень підготовки і перерви у навчанні, тому на перших уроках приділяється особлива увага виявленню і ліквідації прогалин у знаннях і уміннях учнів з різних розділів шкільного курсу математики. На це і націлюють програми, за якими передбачено в кожному класі повторення базових знань і умінь на початку навчального року (вступно-коректівні розділи), які визначають рівень знань, умінь і навичок при завершенні навчання в даному класі.

На уроках у вечірній школі значна увага відводиться етапам вивчення нових знань і формування відповідних умінь і навичок, мотивації вивчення нових знань, їх використанню в науці і на практиці, розвитку інтересу до предмету і його методів. Вивчення нового матеріалу будується так, щоб учні одночасно повторювали і закріплювали в пам'яті раніше пройдений навчальний матеріал. Крім того, учитель систематично і послідовно розвиває логічне мислення, уявлення і волю учнів, озброює їх уміннями й навичками навчальної роботи, прийомам самоосвіти, удосконалює культуру читання, усну і письмову математичну мову.

Майже на кожному уроці проводяться самостійні роботи. В основному вони мають навчаючий характер і спрямовані на формування умінь виконувати аналіз матеріалу, що вивчається, виділяти в ньому істотне, обгрунтовувати етапи (кроки) перетворень і доведення теорем, знаходити способи і методи розв'язування практичних і пізнавальних задач. Велику допомогу в педагогічному керівництві самостійною роботою учнів на уроках і особливо на групових і індивідуальних консультаціях надають спеціально розроблені дидактичні матеріали: картки-завдання для самостійних робіт з усіх питань курсу в кількох варіантах, тренувальні і навчальні дидактичні матеріали (картки-інструкції для самостійного вивчення того чи іншого розділу курсу, картки-інформатори з доступним і коротким викладом теоретичного матеріалу, зразки виконання завдань, алгоритмічні приписи і евристичні схеми, картки-завдання на виділення способів оперування вивченим матеріалом), комплекси карток-завдань для самостійних перевірних, контрольних робіт і заліків.

Для організації самостійної роботи учнів-заочників розробляються установчі матеріали, до змісту яких входять:

1) теми заліків, календарні строки їх підготовки і здачі;

2) вимоги до знань, умінь і навичок з розділу, який винесено на залік;

3) навчальний матеріал (які розділи, пункти і параграфи необхідно вивчити, які письмові або практичні роботи виконати, яку додаткову літературу прочитати);

4) дидактичні матеріали (зразки виконання письмових робіт, окремих завдань, рекомендації до вивчення матеріалу);

5) питання для самоперевірки, а також деякі завдання навчально-дослідницького або творчого характеру, що пропонуються учням з метою активізації їх мислення.

Заліки у вечірній школі є не тільки формою підсумкового контролю знань, але й мають навчаючий характер. У процесі заліку виявляються дійсні знання і уміння учнів, відмічаються успіхи й досягнення, виявляються прогалини і труднощі, проводиться робота по їх усуненню, намічається програма по закріпленню вивченого матеріалу. Залік таким чином стає відправним моментом для дальшого удосконалення знань, для розвитку пізнавальних інтересів і здібностей учнів.

Велике значення у вечірній школі має і заключне повторення. Тут використовуються дидактичні матеріали, які сприяють систематизації і поглибленню знань, успішній підготовці до екзаменів. Це різні повторювально-узагальнюючі таблиці, зведені таблиці властивостей і графіків функцій, таблиці законів і властивостей математичних дій, інформатори з аналізом розв'язань задач попередніх випускних і вступних екзаменів до вузу і ін. Наявність таких матеріалів дає змогу вчителю не тільки проводити індивідуальні і групові консультації, але й організовувати колективну, групову або індивідуальну навчальну роботу.

§ 10. ОСОБЛИВОСТІ ОРГАНІЗАЦІЇ РОБОТИ З МАТЕМАТИКИ В СЕРЕДНІХ ПРОФТЕХУЧИЛИЩАХ

Специфіка навчального процесу в профтехучилищі полягає перш за все в органічній єдності теоретичного і виробничого навчання, тому вимагає застосування найрізноманітніших способів взаємодії того, хто навчає, і тих, кого навчають.

Багаторічний передовий педагогічний досвід, нагромаджений працівниками профтехучилищ нашої країни, показав, що класно-урочна система, яка розроблена з урахуванням специфіки профтехосвіти і покладена в основу теоретичного навчання, сприяє досягненню найбільшого педагогічного ефекту.

Першочергове завдання загальної освіти в середніх профтехучилищах полягає в тому, щоб сформувати в учнів певну систему знань основ науки, яка б дозволила їм глибше оволодіти змістом спеціальних предметів, що визначені навчальним планом і кваліфікаційними характеристиками, надалі удосконалювати свою професійну майстерність. Досвід показує, що ефективність навчання учнів у середніх профтехучилищах помітно підвищується, якщо підійти до організації навчального процесу диференційовано. Це означає, що досягнення кінцевих цілей навчання — формування міцних, усвідомлених, дійових, системних знань — можливе тільки при послідовному детальному розгляді проміжних, загальних і поодиноких дидактичних цілей. Внаслідок такого підходу процес навчання здійснюється немовби на певних рівнях, що відрізняються один від одного як підвищенням складності змісту дидактичних цілей, так і результатами їх досягнення.

На кожному рівні висуваються і реалізуються конкретно цілі, які враховують попередню математичну підготовку учнів (обсяг і якість знань, умінь і навичок) і індивідуальні їх особливості.

В процесі організації навчання в середніх профтехучилищах доцільно виділити три рівні навчання, на кожному з яких реалізуються проміжні дидактичні цілі.

На рівні І: накопичення фактичних знань — засвоєння математичних понять, законів, теорій з предмету; формування умінь застосовувати одержані знання за зразком, набування обчислювальних навичок.

На рівні ІІ: поглиблення знань (в тому ж обсязі) про поняття, закони, теорії, формування умінь добувати нові знання і застосовувати їх у нових умовах.

На рівні ІІІ: збільшення обсягу і поглиблення математичних знань; формування умінь самостійно добувати нові знання і застосовувати їх при розв'язуванні творчих задач; набування самостійних навичок оперування математичним апаратом, конструювання навчальних проблем.

Для досягнення зазначених проміжних дидактичних цілей необхідно виділити основні елементи системи наукових знань, умінь і навичок, які слід сформувати в процесі організації навчання на кожному рівні з конкретної теми.

Реалізація проміжних дидактичних цілей і формування системи наукових знань, умінь і навичок учнів у процесі організації навчання на кожному рівні передбачає застосування різних методів і форм роботи з учнями.

На рівні І повідомлення навчального матеріалу здійснюється переважно пояснювально-ілюстративним методом у всіх його проявах: широко використовуються наочні посібники. У процесі закріплення і набування умінь і навичок, оперування знаннями за зразком застосовується репродуктивний метод. У процесі перевірки знань необхідно встановити фактичне засвоєння учнями понять, законів, теорій, наукових фактів, уміння оперувати ними за зразком. Треба мати на увазі, що під час організації процесу навчання не слід затримувати учнів довгий час на рівні І, через те що тривале застосування репродуктивних методів неминуче приводить до зниження розумової активності учнів, до формального засвоєння знань.

Найбільш ефективним методом, що сприяє розвитку розумової активності учнів на рівні ІІ, є частково-пошуковий метод, який у значній мірі сприяє розвитку самостійності під час аналізу і розв'язування навчальних проблем, а також використанню конкретного навчального матеріалу на практиці.

Для здійснення цілей перевірки рівня ІІ навчання ефективними є такі методи: евристична бесіда, самоперевірка робіт учнів, творчі письмові роботи, реферати, нескладні задачі практичного змісту.

Під час організації навчального процесу на рівні ІІ навчання учні набувають міцні, усвідомлені, достатньо системні знання.

Разом з тим організація теоретичного навчання в середньому профтехучилищі повинна забезпечити підготовку робітників високої кваліфікації, здібних творчо мислити. Таку підготовку учні дістають

внаслідок організації навчання на рівні III, основними методами якого є частково-пошуковий і дослідницький. За їх допомогою учні набувають повноцінні, осмислені, оперативно використовувані знання, у них формуються елементи творчого підходу до використання одержаних знань на виробництві.

Перевірка знань, умінь і навичок на рівні III навчання учнів здійснюється викладачем у процесі спостереження за їх роботою.

Оскільки в професійно-технічних училищах, які готують кваліфікованих робітників з середньою освітою, навчання професії і вивчення основ наук складає єдиний навчально-виховний процес, протягом усього періоду навчання провідне місце в ньому повинно належати міжпредметним зв'язкам у викладанні предметів професійного і загальноосвітнього циклів. Зв'язок викладання математики з практичною діяльністю учнів передбачає використання виробничо-технічного матеріалу спеціальних дисциплін для поглиблення і розширення загальноосвітніх знань за допомогою розв'язування задач, складених на цьому матеріалі, що сприяє розвитку в учнів уміння застосовувати свої знання на практиці і підвищує інтерес до вивчення математики.

Тому, щоб уміло встановлювати міжпредметні зв'язки у викладанні математики і спецдисциплін, викладач математики повинен ознайомитися з навчальним планом і програмами з кожної спецдисципліни та з'ясувати той математичний апарат, за допомогою якого формуються професійні знання.

Відповідний матеріал спеціальних дисциплін слід розподілити за темами і знайти форми, в яких цей матеріал можна найбільш ефективно використати при викладанні математики.

Розв'язування задач з вибірковим змістом вимагає відповідної методики, основні принципи якої, на наш погляд, такі:

1. Зміст задачі повинен відповідати певній темі навчального курсу математики.

2. Зміст задачі повинен відображати сучасний рівень розвитку техніки виробництва.

3. Умова задачі повинна бути з обмеженою кількістю незнайомих учням термінів, короткою і доступною для розуміння.

4. Розв'язуванню задачі повинно передувати розуміння технічного змісту, термінології. Математичний смисл не повинен розчинятися в технічному змістові.

5. Задачі з вибірковим змістом супроводжуються збільшеною обчислювальною частиною, тому для її виконання слід користуватися технічними засобами або давати готові проміжні результати в залежності від поставленої мети навчання.

6. До деяких задач доцільно за рішенням викладача мати готові креслення, рисунки, моделі, використання яких дозволяє економити час і викликає інтерес учнів. Наприкад, як модель можна використати частини машин, верстатів, обладання з навколишнього оточення учнів, які являють собою немовби «природні наочні посібники».

7. Задачі, складені на матеріалі спеціальних дисциплін, повинні бути органічною складовою частиною системи задач і вправ з математики.

При складанні задач і вправ на матеріалі спецдисциплін викладач математики відчуває деякі труднощі. З одного боку, не всі теми шкільного курсу мають потенціальну можливість збагачення задачами і прикладами практичного змісту; з другого — не всі спеціальні предмети піддаються «математичній обробці» в межах шкільного курсу і можуть дати практичний матеріал для складання математичних задач.

У спеціальних збірниках з математики для середніх профтехучилищ є задачі з виробничим змістом за групами професій (див. [8; 9; 31; 34]). Використання такого виду задачників дозволяє вчителю математики детально розробляти тематичні плани з вказівкою конкретних задач і дає можливість огляду цілої системи таких задач і вибору відповідної методики їх використання.

Важливим фактором успішної організації навчально-виховного процесу в середніх профтехучилищах є наступність у роботі викладачів математики профтехучилищ і загальноосвітніх шкіл.

В умовах середнього профтехучилища, де навчальні групи комплектуються з випускників дев'ятих класів різних шкіл, особливої уваги набуває вивчення рівня підготовки учнів, виявлення прогалин в знаннях та їх ліквідація, «вирівнювання» знань з найбільш важливих розділів і тем програми з математики.

Ефективним засобом визначення рівня знань учнів з математики є проведення контрольних робіт за програмою неповно-середньої школи, в яких зосереджено увагу на основних поняттях і вузлових, провідних питаннях курсу, що є важливим для оволодіння новими темами. Перед цим для ліквідації істотних прогалин у знаннях окремих учнів аналізуються помилки, що їх допустили учні в перевірних письмових роботах, а також усні відповіді і домашні завдання; учитель веде тематичний облік знань недостатньо підготовлених і невстигаючих учнів, причому доцільно індивідуалізувати не тільки класні, а й домашні завдання з обов'язковою перевіркою і наданням необхідної допомоги.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Ленин В. И.* Полн. собр. соч., т. 23.
2. *Крупская Н. К.* Полн. собр. соч. М., 1958, т. 8.
3. *Сухомлинский В. А.* О воспитании. М.: Политиздат, 1973.
4. *Бабанский Ю. К.* Оптимизация учебно-воспитательного процесса. М.: Просвещение, 1982.
5. *Бевз Г. П.* Методика викладання математики. К.: Вища шк., 1989.
6. *Бевз Г. П.* Урок математики в школі. К.: Вища шк., 1977.
7. *Бекбоев И. Б.* Алгебраические задачи с производственным содержанием. Фрунзе, 1961.
8. *Борисов Н. И.* Как обучать математике. М.: Просвещение, 1979.
9. *Воловіч М. Б.* Требования к заданиям, обеспечивающим усвоение формулировок теорем и их доказательств // Новые исслед. в пед. науках. 1979. № 2.
10. *Гусаков В. Я., Якубович С. М.* Сборник задач по математике для рабочих энергетических профессий. М.: Просвещение, 1979.

11. *Гуткин Л. И.* Сборник задач по математике (строительные профессии). М.: Просвещение, 1975.
12. *Дидактика* средней школы / Под ред. М. А. Давыдова, М. Н. Скаткина. М.: Просвещение, 1975.
13. *Есипов Б. П.* Самостоятельная работа учащихся на уроках. М.: Просвещение, 1961.
14. *Жовнір Я. М.* Система деяких вправ для формування в учнів VI класу просторових уявлень // Методика викладання математики. К., 1969. Вип. 5.
15. *Жовнир Я. М.* Изучение геометрии по фузионистской системе // Новые исслед. в пед. науках. Сообщ. I, II. М., 1974. Вып. 10, 11.
16. *Закирова З. З.* Об одном виде проверочных заданий // Математика в школе. 1979. № 2.
17. *Ирошников Н. П.* Организация обучения математике в 4—5 классах сельской школы. М.: Просвещение, 1982.
18. *Касьяненко М. Д.* Підвищення ефективності вивчення математики: Навчально-метод. посібник. К.: Рад. шк., 1980.
19. *Костяшкин Э. Г.* Школа продленного дня. М.: Просвещение, 1965.
20. *Лернер И. Я.* Процесс обучения и его закономерности. М.: Знание, 1980.
21. *Лоповок Л. М.* Виховна робота на уроках геометрії в 6—8 класах: Метод. посібник. К.: Рад. шк., 1986.
22. *Малахов Н. Д.* О переходе вечерних школ на усовершенствованные программы // Вечерняя средняя школа. 1982.
23. *Махмутов М. И.* Современный урок. М.: Педагогика, 1981.
24. *Методика* преподавания математики в средней школе: Общая методика: Учеб. пособие для студентов пединститута / Под ред. Ю. М. Колягина и др. М., 1975.
25. *Нечкина М. В., Энштейн Д. А.* Современный урок: опыт и размышления // Сов. педагогика. 1980. № 5.
26. *Организация* контроля знаний учащихся в обучении математике: Пособие для учителей // Сб. статей / Сост. Э. Г. Борчугова, Ю. Ю. Батий. М.: Просвещение, 1980.
27. *Оборудование* кабинета математики: Пособие для учителей. М., 1980.
28. *Оптимизация* процесса обучения математике в средней школе // Сб. науч. тр. / Под ред. Ю. К. Бабанского. М., 1979. Вып. 3.
29. *Онищук В. А.* Урок в современной школе. М.: Просвещение, 1981.
30. *Поисковые* задачи по математике (4—5 классы) / Под ред. Ю. М. Колягина. М.: Просвещение, 1979.
31. *Педагогика* школы / Под ред. И. Т. Огородникова. М.: Просвещение, 1977.
32. *Преподавание* алгебры и геометрии в школе / Сост. О. А. Боковнев. М.: Просвещение, 1982.
33. *Пидкасистый П. И.* Самостоятельная познавательная деятельность школьников в обучении. М.: Педагогика, 1980.
34. *Пиговский А. П., Маланюк М. П.* Преподавание математики в условиях кабинетной системы обучения: Из опыта работы: Пособие для учителей. М.: Просвещение, 1981.
35. *Рекомендации* по предупреждению и преодолению неуспеваемости учащихся общеобразовательных школ / Сост. Ю. К. Бабанский и др. М.: НИИшкол, Просвещение, 1976.
36. *Рудник Р. С., Соколов И. Я.* Сборник задач и упражнений по математике для подготовки металлистов в средних ПТУ. М., 1977.
37. *Скаткин М. Н.* Проблемы современной дидактики. М.: Педагогика, 1980.
38. *Талызин Н. Ф.* Управление процессом усвоения знаний. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1975.
39. *Терешин Н. А.* Сборник задач по математике для средних сельских профтехучилищ. М., 1974.
40. *Хрипкова А. Г.* Организация учебно-воспитательного процесса в школе полного дня. М., 1978.
41. *Хабиб Р. А.* Организация учебно-познавательной деятельности учащихся (на материале математики). М.: Педагогика, 1979.

РОЗДІЛ 7

ЗАСОБИ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ

Різноманітні засоби навчання математики повинні складати єдиний комплекс, основою якого є підручник з математики. Всі останні засоби навчання, призначені для кращого засвоєння шкільного курсу математики, мають бути тісно зв'язані з підручником спільними цілями формування в учнів міцних, стійких і практичних знань, умінь і навичок.

До засобів навчання відносяться дидактичні матеріали, довідкова та інша математична література для школярів, наочні і технічні засоби навчання математики і ін.

§ 1. ПІДРУЧНИК З МАТЕМАТИКИ

1.1. Призначення підручника математики. Підручник математики — книга, в якій викладено основи наукових знань з математики у відповідності з цілями навчання, визначеними програмою і вимогами дидактики.

Стосовно рівня освітньої підготовки учнів у підручнику фіксуються обсяг і система знань, що підлягають вивченню. Зміст і побудова підручника визначаються завданнями викладання математики в середній школі і специфікою предмету. У зв'язку з цим до нього ставляться слідуючі вимоги:

а) сприяти формуванню діалектико-матеріалістичного світогляду, розвитку логічного мислення;

б) давати систематичний, науково обгрунтований, доступний для учнів даного віку виклад основних теоретичних знань з математики;

в) мати достатню кількість різноманітних задач і вправ, розміщених у доцільній з методичної точки зору послідовності.

Внаслідок свого призначення в системі засобів навчання підручник являє собою ядро, навколо якого групуються всі інші навчальні засоби. Своїм змістом і методичним апаратом він має вирішальний вплив на мислення учнів, на розвиток пам'яті, інтересу, на формування умінь самостійної роботи з підручником.

Аналіз вимог, які ставляться до підручника з математики, приводить до висновку про те, що він не має одного певного адресату.

Перш за все зміст тексту, підбір прикладів, мова, рівень формалізації розраховані безпосередньо на учня відповідного віку. Разом з тим у підручнику легко виявити матеріал, не обов'язковий для учня в умовах класно-урочної системи навчання, однак необхідний учителю для організації навчального процесу. Цей матеріал дозволяє вчителю розпізнати методичний задум автора і ефективно його реалізувати. Таким чином, другим адресатом підручника є учитель. Крім того, підручник використовується і представниками адміністрації школи, батьками, однак основними адресатами підручника є учень і учитель.

Різні підручники з математики відповідають різним вимогам і, як правило, в більшій чи меншій мірі задовольняють потреби учня і учителя.

Наприклад, структура підручника «Геометрія, 7—11» О. В. Погорелова в більшій мірі відповідає потребам учня, який користується цією книгою після пояснення учителя. В цьому полягає одна з його методичних особливостей*. Названий підручник відрізняється компактним викладом, систематичним показом способів розв'язування основних задач, виділенням основного матеріалу, відсутністю дрібних деталей. Цілком зрозуміло, що така структура підручника передбачає повну самостійність учителя в організації засвоєння матеріалу учнями.

Прикладом підручника, який повніше відповідає потребам учителя, можна назвати книгу В. Л. Гончарова «Початкова алгебра», в якій при викладі кожного питання пояснюючий текст розбивається на невеликі смислові порції, до кожної з яких додається відповідна група вправ. Виклад матеріалу подано в такій формі, яка повністю відповідає його подачі на уроці. У ряді випадків теоретичним відомостям передують вправи, вступні задачі, допоміжні запитання. Система вправ забезпечує процес формування математичних понять, умінь і навичок, оволодіння математичною мовою, розвиток логічного мислення. Все це значною мірою допомагає вчителю організувати навчальний процес на уроці.

Така структура підручника не зовсім зручна для учня. Цей підручник важко читати дома. Він не зручний для повторення матеріалу, і зокрема при підготовці до екзаменів, через те що в ньому досить важко виділити головне, знайти необхідні пояснення і основні задачі. Оскільки головна частина роботи учня з підручником припадає на домашню роботу, йому зручніше мати справу з матеріалом, який подано в деякому узагальненому вигляді, більш стисло, а саме в такому вигляді, в якому він повинен попасти в пам'ять учня на тривалий час.

Отже, можна сказати, що підручник — це засіб засвоєння основ наук, який призначено для учнів. Одночасно це короткий виклад — резюме наукових знань учителем.

1.2. Структура підручника математики. Підручник з математики для середньої школи будується на основі певних логічних принципів. Він враховує вікові особливості учнів, визначений для даного віку рівень строгості викладу, поставлені цілі навчання і т. д.

Наприклад, зміст шкільного підручника з математики для молодших класів, як правило, спирається на приклади з найближчого оточення учнів, знайомі їм з власного досвіду.

Однак в міру розширення середовища, доступного для пізнання, воно стає недоступним для безпосереднього сприйняття учнем. Тому стають необхідними описи і словесні пояснення, які дають готові знання, викладений матеріал все в більшій мірі будується в логічній

---

* Див.: *Тесленко И. Ф., Фирсов В. В.* О методической системе учебного пособия А. В. Погорелова // Математика в школе. 1981. № 5.

послідовності; внаслідок чого з'являється перехід від систематичності, обумовленої середовищем, до логічної систематичності. Саме за таким принципом вводиться, наприклад, геометричний матеріал в курсі математики молодших класів середньої школи. З опорою на найближче оточення учнів у I—VI класах при поступовому ускладненні об'єктів, що вивчаються, у VII класі починається виклад систематичного курсу геометрії.

У підручниках з математики при наявності однакового змісту, який вводиться по черзі на нижчих і вищих рівнях навчання, використовується концентрична або циклічна систематичність. Кожний з цих рівнів утворює певний цикл.

Таке своєрідне повторення матеріалу на вищих рівнях полегшує його запам'ятовування і розуміння, а також оволодіння все складнішими функціями мислення. Функції, засвоєні на нижчих циклах, підготовляють до виконання функцій, які необхідні на вищих циклах. Дякуючи цьому циклічна побудова змісту складає основу виділення ступенів його трудності. Прикладами циклічної побудови змісту можуть бути тотожні перетворення, рівняння, нерівності і т. д.

Використання різних видів систематичності дозволяє поєднати в єдине три рівні пізнання, визначені матеріалістичною теорією пізнання: рівень безпосереднього спостереження — в побудові, обумовленій середовищем; рівень абстрактного мислення — в логічній побудові; рівень перевірки і використання знань — у цільовій побудові. Оскільки ж всі рівні пізнання не ізольовані один від одного, а існують у взаємозв'язку, то й різні побудови змісту взаємопов'язані між собою в процесі навчання. Через різні способи їх використання підручник може впливати на відповідну цим взаємозв'язкам побудову уроку.

Зрозуміло, що зміст, який взято з навколишнього середовища, відіграє в курсі математики хоча і важливу, але все ж допоміжну роль.

Тому в середніх і старших класах роль систематичності, обумовленої середовищем, весь час зменшується. Це пояснюється головним чином розширенням пізнавального середовища і все меншою його доступністю для безпосереднього спостереження. Крім цього зростаюча за класами навчання кількість інформації приводить до все більшого використання абстракцій і узагальнень, тобто виклад стає більш формалізованим.

1.3. Мотивація навчального матеріалу. При вивченні матеріалу підручника з учнями, мабуть, найважчою є проблема створення відповідної мотивації учіння, тобто потреби, інтересів, стимулів, які забезпечують активність пізнавальної діяльності учнів, адже однієї лише вказівки на необхідність того чи іншого знання для майбутньої діяльності недостатньо для появлення активного пізнавального інтересу. Стійким і тривалим є лише той інтерес до предмету, який створюється проблемною ситуацією. Здається, більш доцільно, якщо теми в підручниках починаються з утворення характерних проблемних ситуацій і рекомендації засобів для їх розв'язання, а не з означення понять і заучування правил, які викладаються індуктивним або

дедуктивним способом. При цьому характер проблемних ситуацій визначається змістом теоретичного матеріалу та віковими особливостями учнів.

1.4. Роль і місце репродуктивних завдань* у підручнику математики. Відомо, що цінність підручника з математики в значній мірі обумовлюється вміщеною в ньому практичною частиною, через те, що система завдань — необхідний компонент апарату організації засвоєння матеріалу підручника. На сьогодні педагогічною наукою переконливо доведено, що в систему завдань слід включати і репродуктивні, і творчі завдання.

Система завдань у підручнику повинна охоплювати всі елементи його змісту.

Репродуктивний елемент формує таку якість знань, як оперативність, тобто здібність застосовувати знання в різних ситуаціях.

Як приклад підручника, який найбільш повно відповідає сучасним вимогам педагогічної науки при побудові системи репродуктивних завдань, можна привести «Геометрію, 7—11» О. В. Погорєлова. У кінці кожного параграфа в ньому вміщені запитання для повторення і вправи.

Ці питання і вправи практично охоплюють усі поняття параграфа, дають цілу логічну картину до засвоєння матеріалу всього розділу. Крім того, в тексти багатьох параграфів включені зразки розв'язання найбільш важливих і важких типів задач.

У прикладах і розв'язаннях задач логічно і вміло наведені пояснення до формування наукових понять.

Ми зупинились на характеристиці і оцінці репродуктивних завдань не тільки тому, що вони складають міцний фундамент для формування знань і умінь та їх застосованості в практиці, але й тому, що вони являють собою основу для успішного виконання системи творчих завдань, які відіграють головним чином розвиваючу роль у навчанні школярів.

1.5. Функції наочності в підручнику математики. Питання про наочність, про ілюстрації в підручнику математики принципово важливе, але мало досліджене. Цілком зрозуміло, що не всі види ілюстрацій, які застосовуються, мають однакове значення для розкриття закономірностей, що вивчаються. Було показано, наприклад, що на процес розв'язування математичної задачі істотно впливає схема і предметно-аналітична картинка, в якій відображені кількісні відношення між даними і шуканими. Використання схем та інших умовних позначень важливо тому, що вони дають змогу виділити об'єктивні відношення і закономірності, тобто моделювати зміст явища, яке вивчається.

Отже, використовуючи наочність, ми завжди виходимо з аналізу методичних функцій наочності, яку подано в підручнику математики. Можна умовно виділити такі з цих функцій:

1. Пізнавальна функція наочності в методичному відношенні полягає у формуванні пізнавального образу об'єкта, що вивчається. Це

* До репродуктивних завдань ми відносимо питання, вправи, задачі, питання-завдання, під час відповідей на які учень виконує репродуктивну (відновлюючу) пізнавальну діяльність.

формування відбувається поступово від простого до складного, при цьому думка учня спрямовується найкоротшим і найбільш доступним шляхом до цілісного сприйняття об'єкта. Зауважимо, що дотримання пізнавальної функції не повторює процесу наукового пізнання — цінність цієї функції полягає в тому, що вона дає можливість учням найкоротшого і доступного шляху осмислення матеріалу, що вивчається*.

Саме так, наприклад, роблять інколи автори підручників, коли під час дослідження функції на монотонність (або екстремум) передують теоретичному обгрунтуванню рисунок, на якому пов'язується зростання (спадання) або локальний максимум (мінімум) функції з кутами нахилу дотичних у відповідних точках і далі з знаками похідних у цих точках.

2. Функція керування діяльністю учня реалізується при застосовуванні засобів і прийомів наочності в орієнтувальних, контрольних і комунікаційних діях. *Орієнтувальною дією* може бути, наприклад, побудова креслення, що відповідає умові, яка розглядається, а також внесення в нього додаткових елементів.

Контролюючі дії спрямовані на виявлення помилок при порівнянні виконаного учнями креслення схеми, графіка з тим, що вміщено в підручнику, або на з'ясування тих властивостей, які повинен зберегти об'єкт при тих чи інших перетвореннях.

Комунікаційні дії відповідають тій стадії реалізації функції керування діяльністю учня, яка відповідає дослідженню одержаних ним результатів. Виконуючи ці дії, учень в межах свого досвіду пояснює іншим або навіть самому собі згідно з побудованою моделлю суть явища або факту, що вивчається.

3. Інтерпретаційна функція наочності полягає в тому, що один і той самий об'єкт можна виразити за допомогою різних знаків і моделей. Наприклад, коло можна задати за допомогою пари (центр, радіус), рівнянням відносно вісей координат, рисунком або кресленням. Однак в одних випадках зручно скористатися його аналітичним виразом, в інших — геометричною моделлю. Розгляд кожної з цих моделей, яка в певних умовах може служити засобом наочності, являє собою її інтерпретацію. Чим більш значущий об'єкт, тим бажано дати більшу кількість інтерпретацій, які розкривають пізнавальний образ з різних сторін.

4. Можна говорити про **естетичні функції** наочності, а також про **опосредковані методичні функції** наочності, такі, як функції забезпечення цілеспрямованої уваги учня, запам'ятовування при повторенні учнями навчального матеріалу, використання прикладної спрямованості і ін.

Використовуючи різні функції наочності, підручник сприяє найбільш плідному мисленню учня, оскільки його увага легко і своєчасно переключається з засобів наочності на одержану за їх допомогою

* Існує думка: «Якщо учень добуває знання тільки найкоротшим і найбільш доступним шляхом, то його роль в навчальному процесі залишається пасивною, а знання — неміцними і погано пов'язаними з уміннями» (див.: *Березин В. Н.* Методические функции наглядности в обучении математики. М., 1975).

інформацію про об'єкт і навпаки. Таке переключення зводить до мінімуму відхилення розумових зусиль учнів від предмету їх діяльності.

1.6. Методи роботи з підручником математики. Підручник і навчальний посібник займають помітне місце в процесах навчання і засвоєння учнем програмового матеріалу, в його класній і домашній роботі. Робота з підручником і навчальними посібниками, якщо вона добре організована і систематично проводиться, є однією з вирішальних умов засвоєння учнями знань і навичок з математики.

Між іншим, уміння читати підручник математики і математичну книгу необхідне не тільки для вивчення математики в школі. Той, хто уміє читати математичний підручник, швидше засвоює методи самостійного вивчення математики, фізики, хімії, біології, техніки.

Читанню підручників математики треба спеціально учити. Зміст і форми роботи з підручником математики визначаються віком учнів, рівнем їх математичної підготовки і загального розвитку, змістом підручника, запасом тих умінь роботи з математичною книгою, які учні набули раніше.

Можна рекомендувати такі форми (які поступово ускладнюються) роботи з підручником математики в V—IX класах:

1. Читання правил, означень, формулювань, теорем після пояснення учителя.
2. Читання інших текстів після їх пояснення учителем.
3. Розгляд прикладів підручника після їх пояснення учителем.
4. Читання вголос підручника вчителем з виділенням головного і істотного.
5. Читання тексту учнями і розбивання його на смислові абзаци.
6. Читання пункту підручника і відповіді на питання вчителя (або підручника).
7. Читання тексту підручника, самостійне складання плану і відповідь учнів за складеним планом.

Необхідно вчити користуватися не тільки текстом та ілюстраціями підручника, але й його заголовком, записами і таблицями, що вміщені на форзацах, анотацією, предметним покажчиком. Правильне користування цим допоміжним апаратом підручника значно прискорює пошуки потрібного матеріалу.

Вміщені в підручнику рисунки мають надавати допомогу при читанні тексту підручника, при розгляданні конкретних прикладів і розв'язуванні задач.

§ 2. ДИДАКТИЧНІ МАТЕРІАЛИ ТА ДОВІДКОВА МАТЕМАТИЧНА ЛІТЕРАТУРА

2.1. Дидактичні матеріали. Підручник математики є одним із основних, але не єдиним засобом навчання. У навчанні використовується єдиний комплекс взаємопов'язаних між собою книг, наочних посібників і технічних засобів.

Одним із видів книг навчального комплексу є «Дидактичні матеріали», які видаються з усіх математичних дисциплін окремо для кожного класу.

Програма і підручник визначають напрям і зміст «Дидактичних матеріалів» та інших навчально-методичних посібників для вчителя і учнів. У свою чергу «Дидактичні матеріали» служать доповненням до системи задач, що вміщені в підручнику, є добрим помічником учителю в організації і проведенні навчання математики.

1. Призначення «Дидактичних матеріалів» — це перш за все допомога учителю математики в організації самостійного розв'язування задач і виконання вправ учнями з курсу математики. Вони призначені для проведення частини уроку, а інколи і всього уроку з фронтального чи індивідуального самостійного розв'язування задач. Це частіше всього *навчаючі* самостійні роботи, які застосовуються після розгляду на уроках відповідних теоретичних положень (введення нових понять, алгоритмів, вивчення нових методів або способів розв'язування задач, доведення теорем і т. д.). Цим роботам передує огляд декількох прикладів, зразків розв'язування задач і т. п. Навчаючі самостійні роботи можна провести також після декількох фронтально розв'язаних задач.

«Дидактичні матеріали» використовуються вчителями для проведення фронтального колективного розв'язування задач на уроці, під час опитування учнів, як додаткові завдання для учнів, які швидко розв'язують задачі. Вони призначені і для організації індивідуальної роботи з учнями при їх самостійному розв'язуванні математичних задач. Так, деякі із задач і текстів самостійних робіт можна використати для роботи з слабкими учнями як додатковий задачний матеріал. В деяких виданнях є так звані «Додаткові самостійні роботи» дещо підвищеної трудності: вони призначені для учнів, які проявляють інтерес до математики. У будь-якому випадку вчитель математики знайде в цих посібниках задачі для різних категорій учнів.

«Дидактичні матеріали» призначені для організації і проведення контрольних робіт за темами курсу при завершенні вивчення тієї чи іншої з них і оглядових контрольних робіт, мета і призначення яких є контроль засвоєння розділу підручника. Учитель може використати повні тексти робіт, вміщені в «Дидактичних матеріалах» і окремі їх частини.

2. Зміст і структура «Дидактичних матеріалів» відповідає програмам, підручникам і навчальним посібникам з математики. Структура навчальних посібників «Дидактичні матеріали» приблизно однакова. Кожен з них починається з передмови, в якій вказано призначення пропонованих робіт і дано короткі вказівки щодо їх використання. В більшості з них далі слідує чотири або більше самостійних робіт з кожної теми, тексти контрольних робіт з тем, чотири варіанти оглядових контрольних робіт (не у всіх виданнях), два варіанти додаткових самостійних робіт, відповіді і вказівки до розв'язків. В деяких посібниках ці види тексту розміщені в іншому порядку. При цьому враховуються вікові особливості учнів, особливості математичної дисципліни, для вивчення якої призначено посібник, розділ математики, що вивчається. Саме цим визначається кількість самостійних і контрольних робіт, кількість задач у тексті кожної роботи.

3. Методика використання «Дидактичних матеріалів» полягає в тому, що вони не мають своєю метою визначити зміст, час і місце проведення самостійних і контрольних робіт. Вирішальна роль у використанні засобів навчання належить учителю. Саме він у відповідності з вимогами програми, складом класу, індивідуальними особливостями учнів, тематичним планом вивчення математики визначає остаточний зміст робіт, які він буде проводити, строки і тривалість їх виконання, ставить перед самостійними роботами конкретні цілі і завдання. Це означає, що вчитель не повинен пунктуально, послідовно домагатися виконання учнями всіх контрольних і самостійних робіт, вміщених в «Дидактичних матеріалах». Учитель вибирає ті задачі, виконання яких вважає необхідною умовою формування в учнів міцних математичних умінь і навичок. Отже, не обов'язково проводити всі самостійні роботи, які є в «Дидактичних матеріалах». Це матеріал-посібник для вчителів, а не розпорядження про неухильне розв'язування всіх вміщених там задач. Учитель сам, використовуючи тексти самостійних і контрольних робіт або їх частину чи окремі задачі і вправи, визначає зміст самостійної роботи учнів на уроці. Вдумливий і старанний учитель, безумовно, використає і додаткову літературу, зокрема збірники задач, що видані в серії «Бібліотека вчителя математики» [9; 15], інші задачники, посібники для вступників до вузів (у старших класах), підібравши задачі для проведення самостійних і контрольних робіт, для фронтального розв'язування в класі.

У відповідності з тематичним планом вивчення того чи іншого розділу математики вчитель визначає строки проведення самостійних і контрольних робіт. Завдання вчителя — у відповідності з рівнем підготовки класу і окремих його учнів встановити дійсну тривалість самостійних і контрольних робіт. При цьому треба враховувати вибраний зміст роботи, вимоги до її оформлення: задачі можуть бути розв'язані з повним або коротким поясненням у зошиті, з повними або короткими посиланнями на ті твердження, які застосовано на різних етапах розв'язування задачі, або зовсім без обгрунтувань — це залежить від цілей роботи та її призначення. Визначаючи тривалість робіт, вчитель повинен керуватися тим, що надмірна тривалість шкідлива не менш, ніж нестача часу для її виконання. Насправді, якщо часу замало, учні можуть не закінчити розв'язання запропонованих задач, і, отже, самостійна робота не досягне своєї мети, а час на її виконання буде витрачено. Надмірний же час для розв'язування тих чи інших задач розхолоджує учнів, не мобілізує їх зусилля і знання. Нестача часу для виконання контрольної роботи спричиняє зниження оцінок, а інколи й інтересу учнів до математики. Надмірний же час для контрольної роботи може бути причиною високих оцінок учнів при низькому рівні їх знань.

Кожній самостійній і контрольній роботі з «Дидактичних матеріалів» повинен передувати короткий, але точний інструктаж учителя. Добре проведений інструктаж мобілізує учнів точніше й швидше виконати роботу, одержати добрі результати. Проводячи інструктаж, учитель повинен зазначити точний час, протягом якого учні мають виконати роботу, порядок розв'язування задач або виконання вправ

(що є в роботі), вказати на деякі особливості задач самостійної чи контрольної роботи, регламентувати поведінку учнів під час роботи (при самостійному розв'язуванні задач можливе взаємне консультування учнів, які поруч сидять, звернення до вчителя за консультацією або іншою допомогою, використання підручника або навчального посібника і т. п.). Слід також зазначити, якими креслярськими інструментами дозволяється користуватися при виконанні креслень, особливо при розв'язуванні геометричних задач на побудову, чи дозволяється користуватися обчислювальними пристроями або таблицями для виконання обчислень. Учитель може вказати і можливі форми запису розв'язання задач. Чітко організоване і цілеспрямоване виконання самостійних робіт з математики значно сприяє формуванню міцних умінь і знань при мінімальній витраті сил і часу учнів.

Кожна самостійна чи контрольна робота повинна організовано закінчуватися. Закінченням самостійної роботи є підведення її підсумків, проведених по можливості на тому ж рівні, що й сама робота. Слід відмітити найбільш раціональні і оригінальні розв'язання задач, запропонованих учням, проаналізувати помилки учнів, які найчастіше повторюються. Підводячи підсумки самостійної роботи, треба показати, чому навчились учні, які нові знання, уміння і навички вони засвоїли.

З підсумків кожної самостійної роботи вчитель повинен зробити висновки щодо подальшого навчання учнів математики.

Підсумки контрольної роботи можна підвести на одному з наступних уроків (після перевірки контрольної роботи вчителем) або на консультації. Останній варіант сприяє економії часу уроку, але займає додатковий час учителя й учнів. Під час аналізу і підведення підсумків контрольної роботи необхідно висвітлити рівень знань, умінь і навичок школярів. Тому до проведення підсумків учитель повинен сумлінно готуватися: класифікувати рівень знань учнів, сформовані в них уміння і навички, допущені учнями помилки в контрольній роботі, виявлені прогалини в знаннях.

2.2. Довідники з математики і довідкова математична література. Навчання користуванню довідниками з математики, довідниковими таблицями та іншою довідковою літературою повинно знайти своє місце при вивченні математики в середній школі. Значення довідників у діяльності кваліфікованого робітника, інженера, спеціалістів інших професій досить велике, довідниками користуються щоденно. Треба також врахувати, що не все, що відведено для вивчення в курсі математики, необхідно запам'ятати. Для запам'ятовування відбирається першорядне, необхідне для дальшого вивчення курсу математики або в житті. Другорядне можна знайти в довідниках, які допомагають швидше пригадати вивчене, але напівзабуте. Їх можна використати і для запам'ятовування багатьох формулювань, тотожностей, формул, методів розв'язування задач і т. д., вони також допоможуть в застосуванні прийомів і методів, вивчення яких не передбачено програмою.

Довідкова математична література адресована різним категоріям читачів: учителям, іншим спеціалістам.

Зміст і структура виданих довідників з шкільного курсу математики приблизно однакові. В довідниках учень і учитель знайдуть: таблиці для обчислення степенів, коренів, обернених чисел, логарифмів, значень показникової і тригонометричної функцій і ін.; фактичні відомості і формули, означення понять, алгоритмічні вказівки (наприклад, вказівки, як будувати дотичну) та приклади застосування цих довідок; відомості, які роз'яснюють основні поняття і найважливіші методи шкільного курсу математики; відомості про деякі поняття і методи математики, що не ввійшли в шкільні підручники і навчальні посібники з математики. Щоб швидко одержати потрібну довідку на початку довідника вміщено докладний зміст, а в кінці — алфавітний покажчик. Крім того, є посилання на інші сторінки довідника.

Довідники з математики можна використовувати під час розв'язування задач, які вимагають математичних знань, вивчених у попередні роки. У цьому випадку користування довідником допомагає швидко відновити в пам'яті зв'язки того, що вивчається, з раніш вивченим, сприяє кращому запам'ятовуванню того, що було вивчено в попередніх класах. При розв'язуванні ж задач часто буває необхідно виконувати значну кількість обчислень, результати яких можна швидко знайти в довіднику (наприклад, у таблицях довжини кіл, площі кругів, значень коренів). Під час проведення розрахункових робіт застосування таблиць довідників поряд з мікрокалькуляторами і логарифмічною лінійкою істотно прискорює роботу. Довідники будуть корисні і при повторенні вивченого. Так, використовуючи вміщені в довіднику формули тригонометричних функцій подвійного і половинного аргументу, можна запропонувати учням подумати або пригадати, як виводяться ці формули (особливо різні формули тангенса і котангенса половинного аргументу). При цьому відбувається досягнення відразу двох цілей: запам'ятовування формул та встановлення зв'язків і залежностей тригонометричних тотожностей.

Довідниками можна скористатися і для ознайомлення з деякими знаннями з математики, які не включені до програми, а отже, не розглянуті в підручниках і навчальних посібниках з математики для середньої школи. Наприклад, тотожності для перетворення добутку синусів, косинусів різних аргументів не включені до програми, але застосовуються при обчисленні інтегралів. Деяким учням (звичайно, кращим, які цікавляться математикою) можна запропонувати розглянути їх у довіднику. При розв'язуванні на позакласних заняттях задач на перетворення тригонометричних виразів корисно скористатися довідником для перетворення тригонометричних функцій потрійного і почетвереного аргументу.

Слід запропонувати кілька порад щодо використання довідників для запам'ятовування математичних знань. Неправильно було б слідувати пораді: не треба запам'ятовувати формули, адже вони є в довідниках. Звертатися до довідника корисно на початковому етапі вивчення нових знань, поступово виключаючи використання довідника в міру оволодіння ними.

Корисні відомості для довідок має видана в двох томах книга «Математика в понятиях, определениях и терминах» [2], в якій розглу-

мачуються поняття і терміни шкільного курсу математики та найважливіші поняття і терміни математичної науки. Поняття і терміни розміщені в алфавітному порядку. У необхідних випадках є посилання на літературу, в якій докладно викладено властивості математичних понять, які включені в ці книги. Власно кажучи, рекомендовані книги є словником математичних відомостей і понять. Деякі поняття і терміни ілюструються конкретними прикладами, в деяких статтях є історичні довідки.

У процесі викладання математики в школі цілком можна використовувати і довідники з вищої математики*. Звичайно, вчити користуватися цими довідниками всіх учнів не потрібно, але для учнів, які цікавляться математикою, в багатьох випадках ці довідники будуть корисними.

§ 3. НАВЧАЛЬНЕ ОБЛАДНАННЯ З МАТЕМАТИКИ І МЕТОДИКА ВИКОРИСТАННЯ ЙОГО В НАВЧАЛЬНІЙ РОБОТІ

На сьогодні для школи розроблена система навчального обладнання з математики, яке знайшло свою реалізацію в «Типовому переліку навчально-наочних посібників і навчального обладнання для загальноосвітніх шкіл».**

У відповідності з переліком до складу навчального обладнання з математики для середньої школи входять:

1. Прилади, моделі, інструменти.
2. Друковані засоби навчання.
3. Екранні засоби навчання.

Дамо коротку характеристику окремих видів навчального обладнання і розглянемо деякі питання методики використання їх у навчанні математики в школі.

3.1. Прилади, моделі, інструменти. Для педагогічного процесу прилади і моделі мають велике значення. У шкільному викладанні поряд з порівняно новими для нашої школи видами навчального обладнання досить широко застосовуються такі традиційні посібники, як набір рухомих моделей з геометрії для VII—IX класів, набір шарнірних моделей кута, трикутника і чотирикутника, демонстраційний прилад з стереометрії (автор Л. А. Стуканов), стереометричний набір (автор І. К. Середа), стереометричний прилад (автор А. І. Раєв), стереометричний ящик і ін. Опишемо деякі з названих приладів.

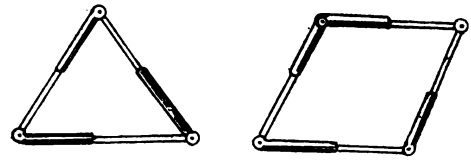


Рис. 60

Набір шарнірних моделей складається з стержнів і трубок, з'єднаних між собою шарнірно (рис. 60).

* Для вчителів математики і студентів математичних спеціальностей педагогічних інститутів можна рекомендувати й іншу довідкову літературу, наприклад: Математическая энциклопедия: В 5 т. М., 1977—1985. Справочная математическая библиотека / Під ред. Л. А. Люстерника, А. Р. Ямпольского.

** Див.: Типовые перечни учебного оборудования для общеобразовательных школ. Средняя школа. М.: Просвещение, 1977.

Рис. 61

Комплект стереометричних тіл для неповно-середньої школи (автор І. Б. Вейцман) складається з двох каркасних тіл— куба і прямокутного паралелепіпеда — та з десяти порожнистих пластмасових тіл (п'ять з них показані на рис. 61).

Порожнисті тіла (крім півкулі) споряджені основами (кришками), які легко знімаються. Набір має: прямий паралелепіпед з прямокутною основою; прямий паралелепіпед з квадратною основою; пряму призму з трикутною основою; піраміду з трикутною основою; піраміду з квадратною основою; піраміду з прямокутною основою; циліндр; конус, у якого основа і висота дорівнюють основі і висоті циліндра; конус, діаметр основи якого дорівнює діаметру більшого круга півкулі, а висота — радіусу півкулі; півкулю.

Основне призначення порожнистих тіл — наближене виведення формул об'ємів геометричних тіл шляхом безпосереднього виміру води, що вміщується в ці тіла.

Стереометричний набір, або комплект деталей для складання моделей з стереометрії (автор І. К. Середа). До комплекту входить набір деталей, призначений для складання моделей геометричних тіл з усіх розділів стереометрії, що вивчаються в середній школі: «Прямі і площини», «Многогранники», «Круглі тіла». Крім того, можна демонструвати комбінації геометричних тіл: призми, піраміди, циліндра, конуса, вписаних в кулю; піраміди і призми, вписаних в циліндр і т. д.

Більшість моделей, зібраних з деталей комплекту, дають можливість змінювати кутові і лінійні елементи, тобто вони являють собою рухомі (динамічні) моделі.

За останні роки великого розповсюдження в практиці навчання математики набули прилади з магнітним закріпленням і гумові штемпелі (штампи).

Прилади з магнітним кріпленням дають можливість неперервного переміщення частин приладу в площині дошки і закріплення їх в будь-якому положенні. Здійснюється це таким чином. Частина класної дошки покривається аркушем заліза і фарбується під колір останньої частини дошки, або така «магнітна дошка» виготовляється окремо і робиться переносною. Деталі, які повинні переміщатися і фіксуватися на дошці в різних положеннях, виготовляють з картону або пластика, на їх зворотну сторону наклеюють плоскі магніти. Така модель, прикладена до «магнітної дошки», міцно утримується на ній і разом в тим може легко переміщатися. Цим створюються можливості для наочної ілюстрації властивостей математичних понять і методів. З успіхом можна, наприклад, застосувати магнітні посібники під час

вивчення дробів, площ плоских фігур, графіків функцій, симетрії, паралельного перенесення, повороту і багатьох інших понять шкільного курсу математики. Таким чином, використання магнітної дошки може замінити багато плоских рухомих моделей. Тепер наша промисловість випускає і через систему «Головпостачзапиту» розповсюджує такі магнітні прилади: магнітна дошка з координатною сіткою, переносна магнітна дошка, комплект кривих для магнітної дошки, магнітний прилад «Вимірювання площ», магнітний прилад «Частини і дроби».

Зручним видом навчального обладнання є **гумові штемпелі** (штампи) з зображенням різних плоских і об'ємних фігур, графіків, таблиць і т. д. При використанні цього виду навчального обладнання достатньо прикласти штемпель до штемпельної подушки і притиснути його до аркуша паперу. Внаслідок цього одержимо (на папері) потрібне зображення, наприклад куба або прямокутного паралелепіпеда. Під час розв'язування задач, пов'язаних з побудовою зображень куба або прямокутного паралелепіпеда, учні, скориставшись штемпелем, можуть швидко одержати в зошиті правильне креслення, що дає велике заощадження часу. Природно, застосування штемпелів не повинно привести до втрати учнями навичок виконання креслень фігур за допомогою креслярських інструментів і приладь. Тому вчитель повинен спочатку навчити учнів виконувати зображення фігур на площині, а потім застосовувати штемпелі на уроці. Їх можна використовувати і під час підготовки вчителем багатоваріантних контрольних завдань. Можна, наприклад, заготовити 35—40 креслень з зображенням прямокутного паралелепіпеда, щоб потім, проставивши розміри, одержати набір індивідуальних завдань.

Крім розглянутого обладнання, у практиці викладання математики широке застосування мають різноманітні інструменти для виконання вимірювальних і креслярських робіт, а також набори для проведення лабораторних робіт. Подаємо короткий опис деяких з них.

Астролябія шкільна (рис. 62) як кутомірний інструмент застосовується для вимірювання на місцевості. Істотними частинами астролябії є лімб (круг, поділений на градуси), алідада (лінійка, що обертається в астролябії навколо вертикальної вісі в центрі лімба), діоптри (металеві пластини з прорізами).

Діоптрів два: один — з прорізом у вигляді вузької щілини, другий — з широким прорізом, всередині якого натягнуто волосок. Для зручності перенесення і зберігання діоптри зроблені складальними. Для відмічення градусів на скошених кінцях алідади є риски—покажчик градусів. Посередині алідади до неї

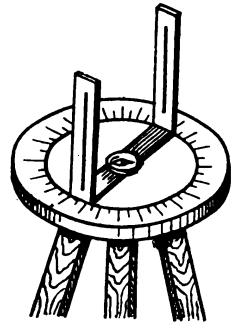


Рис. 62

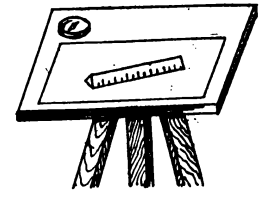


Рис. 63

закріплено компас. Для встановлення лімба в горизонтальне положення на ньому закріплено рівень.

Мензула шкільна з візирною лінійкою (рис. 63) застосовується для знімання планів місцевості і являє собою переносний креслярський столик, на який кладеться лінійка і компас.

Тренога призначена для встановлення вимірних інструментів (астролябії, мензули і ін.) при виконанні вимірювань на місцевості.

Креслярські інструменти демонстраційні:

1) лінійка класна з ручкою;
2) лінійка метрова з кольоровою шкалою;
4) транспортир;
5) циркуль пропорціональний;
6) трикутники з кутами 30°, 60°, 90° і 45°, 45°, 90°;
7) циркуль креслярський.

Набір геометричних тіл складається з 12 тіл: двох паралелепіпедів, трьох призм (три,- шести-, восьмикутні), чотирьох пірамід (три-, чотири-, шести-, восьмикутні), циліндра, конуса, кулі. Геометричні тіла, що входять до цього набору, можна використовувати під час проведення різноманітних вимірювальних і обчислювальних робіт.

Набір моделей для проведення лабораторних робіт з вимірювання довжин, площ і об'ємів тіл має 20 палеток, 40 кубиків розміром 10 × × 10 × 10 мм, 40 кубиків розміром 20 × 20 × 20 мм, а також різні плоскі фігури і ступінчаті тіла. Учень, приймаючи за вказівкою один із кубиків за одиничний і розглядаючи видане йому ступінчате тіло, визначає об'єм, площу поверхні тіла, розміри найменшої прямокутної коробки, яка вміщує це ступінчасте тіло, і т.п. Аналогічна робота проводиться з плоскими фігурами і палеткою.

Моделі, прилади та інструменти, що випускаються промисловістю, не завжди можуть задовольнити потреби, які виникають в процесі навчання школярів математики. Тому вчителі часто вдаються до виготовлення моделей своїми силами з залученням учнів. Це робиться не тільки в тих випадках, коли в школі відсутні необхідна модель, прилад чи інструменти, але й тоді, коли вчитель вважає, що наявна модель, прилад не в повній мірі сприяють виразному і чіткому сприйманню матеріалу, що вивчається. Удосконалюючи модель, учитель залучає учнів до виготовлення нового варіанту моделі. Це сприяє тому, що учні одержують більш глибокі й міцні знання, уміння застосовувати теоретичний матеріал на практиці.

Моделі, прилади фабричного і саморобного виготовлення можна використовувати при введенні нових понять і доведенні теорем, при розв'язуванні задач, при виконанні практичних і лабораторних робіт.

Подаємо приклади.

1. Розглянемо застосування посібників під час введення понять прямої, перпендикулярної до площини, і вивченні ознаки перпендикулярності прямої і площини. Будемо при цьому виходити з такого означення: «Пряма і площина називаються взаємно перпендикулярними, якщо пряма перпендикулярна кожній прямій, яка лежить у площині».

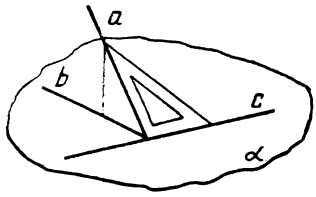


Рис. 64

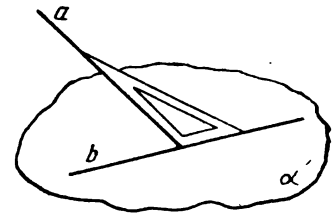


Рис. 65

При введенні цього означення важливу роль відіграє застосування моделей. Особливо тут важлива демонстрація контрприкладів. Це робиться за допомогою моделі прямої a, яка не перпендикулярна принаймні до однієї прямої $b \subset \alpha$ (рис. 64). Ця модель не викликає в учнів наочних уявлень про перпендикулярність прямої a і площини α, що є істотним для формування правильного розуміння означення. В ході демонстрації вказаної моделі слід чітко провести відмінність між смислом слів «кожній прямій площини» і «якій-небудь прямій площини», оскільки тут учні часто плутають.

Підхід до введення формулювання ознаки перпендикулярності прямої і площини можна виконати в проблемному плані з використанням моделей. Розглядання починається з найпростішого випадку: відомо, що дана пряма a перпендикулярна одній прямій b, що лежить в площині α. Демонструється модель (рис. 65), розглядаючи яку учні помічають, що твердження $a \perp \alpha$, взагалі кажучи, неправильне. За допомогою цієї ж моделі, добавивши пряму c, паралельну b (рис. 66), переконуємо учнів у хибності твердження, що з перпендикулярності прямої a до кожної з двох прямих b і c, які лежать в площині α, випливає перпендикулярність a і α.

Потім демонструється за допомогою моделі (рис. 67) випадок, коли пряма a перпендикулярна до прямих b і c, які перетинаються між собою і лежать в площині α.

За допомогою нової моделі (рис. 68) робиться спроба надати прямій таке положення, щоб вона, будучи перпендикулярною до двох прямих (b і c), була похилою відносно третьої прямої d. Учні переконуються, що це неможливо. Потім вони самостійно формулюють ознаку перпендикулярності прямої і площини.

Після введення поняття перпендикуляра до площини і доведення розглянутої ознаки слід звернутися до практичних застосувань у тех-

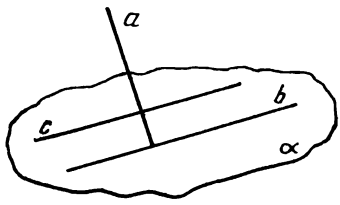


Рис. 66

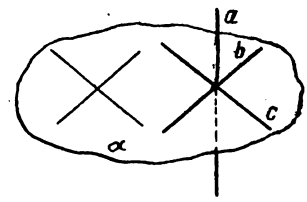


Рис. 67

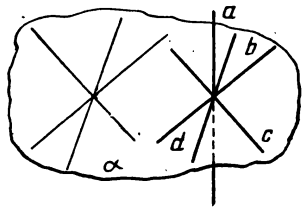


Рис. 68

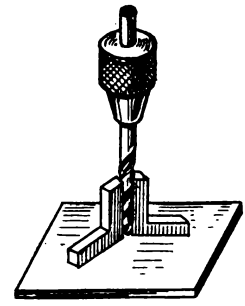


Рис. 69

ніці. Під час ремонту свердлильного верстату слюсарю доводиться вивіряти перпендикулярність вісі шпінделя свердла до площини столу, на якому закріплюється деталь. З цією метою слюсар звичайно користується кутниками, які він установлює в декількох положеннях, застосовуючи при цьому означення перпендикуляра до площини. Цей приклад доцільно проілюструвати спеціальним плакатом, на якому наочно показано практичний процес вивірки перпендикулярності вісі свердла до площини столу (рис. 69).

2. Щоб підвести учнів до формування теореми про об'єм похилої призми, можна використати таку модель. Із скла виготовлена похила призма без верхньої грані. У цю призму вміщена така сама призма, що виготовлена з картону і перерізана на дві частини перпендикулярним перерізом.

Демонструючи модель, виймають картонну призму з скляного футляра і міняють місцями частини, з яких вона складається. Внаслідок одержують призму, основою якої є перпендикулярний переріз, а висотою — бічне ребро похилої призми. Спостерігаючи це, учні самостійно формулюють відповідну теорему.

3. Розглянемо один з можливих варіантів застосування наочних посібників під час розв'язування задач. Для прикладу візьмемо таку задачу: «У кубі $ABCD\ A_1B_1C_1D_1$ проведено площину через середини ребер BB_1, CC_1, A_1D_1. Визначити дійсну форму перерізу та взаємне положення січної площини і відрізка BK, якщо точка K — середина ребра AA_1» (рис. 70).

Щоб визначити форму перерізу, треба побудувати зображення шуканого перерізу. Більшість учнів допускають таку помилку: з'єднують точки M, N, L, а потім займаються визначенням форми трикутника. Таке уявлення про форму перерізу приводить до помилки і при розв'язуванні другої частини завдання, яка є наслідком неправильного розуміння площини як обмеженого куска. Щоб уникнути зазначеної помилки, можна показати на моделі куба, виготовленого із скла (без однієї грані), положення січної площини, помістивши в модель прямокутник із картону. Але можна використати й інший посібник. Виготовляється розгортка куба (із цупкого картону або фанери), яку фарбують в темний колір, а контурні лінії виділяють білим кольором. Розгортку підвішують на класній дошці, а учневі пропонують показати на ній сліди січної площини. Якщо учень уявляв переріз

у формі трикутника, він зможе побудувати лише один слід січної площини на грані BCC_1B_1. Відразу виявляється помилка. При перетині куба площиною на його гранях ми одержимо принаймні три сліди. Потім проводимо аналіз побудови перерізу куба даною площиною.

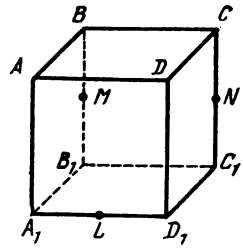


Рис. 70

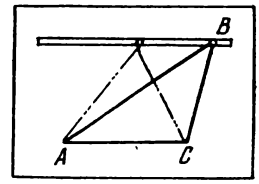


Рис. 71

Зупинимося на деяких найбільш істотних недоліках використання моделей у навчанні математики. Часто наочні засоби розглядають лише як тимчасову опору при початковому засвоєнні знань. Прихильники такої оцінки ролі наочних посібників вважають, що моделі в цьому випадку привчають учнів до очевидності і тому не сприяють розвитку логічного мислення. Висувається навіть дидактичне правило: чим старші учні, тим треба менше застосовувати моделей у викладанні математики. Прийняти таку точку зору і дидактичне правило, яке з неї випливає, не можна, оскільки вони безпідставні. Застосування наочних посібників не тільки доречно, а й необхідно на всіх ступенях навчання.

Другий істотний недолік у застосуванні засобів наочності — використання їх лише з метою ілюстрування. Якщо уявлення допомагають мисленню, то ще в більшій мірі допомагає йому зорове сприйняття. У пізнавальних процесах образна і логічна сторони знаходяться в єдності і образні компоненти в мисленні необхідні. Але, являючись джерелом пізнання, «живе споглядання» може вести до абстрактного мислення тільки в процесі оперування з пізнаваним об'єктом (і його моделями), у процесі його зміни, дії над ним. Отже, показ готових моделей — це лише одна сторона справи. Друга, більш важлива сторона — підхід до побудови моделей і оперування ними. Наведемо приклад.

При вивченні теми «Паралелограм» учитель, звичайно, показує учням різні паралелограми, вирізані з картону або іншого матеріалу. При цьому в різних випадках він пропонує учням яку-небудь додаткову роботу (наприклад, провести діагоналі, знайти суму кутів, прилеглих до однієї сторони). Між іншим «жорсткий» паралелограм можна використати не тільки в ілюстративних цілях. За його допомогою можна розв'язати з учнями ряд цікавих задач на побудову паралельних прямих і перпендикулярів, на знаходження бісектриси кута і т. д. Більш того, оскільки «жорсткий» паралелограм є одночасно двосторонньою лінійкою, за його допомогою можна розв'язати будь-яку задачу на побудову, яка розв'язується циркулем і лінійкою. Але вчитель не завжди враховує зазначені позитивні якості наочного посібника і обмежується лише простою його ілюстрацією.

Недоліки в застосуванні засобів наочності можуть виникати і часто дійсно виникають внаслідок невдалої конструкції моделі або невмінням обходитися з нею. Наведемо приклад.

Відомий посібник для ілюстрації поняття рівновеликості фігур (рис. 71). На щитку з цупкого матеріалу зроблено щілину паралельно основі трикутника *ABC* (основа накреслена на щитку). Бічні сторони трикутника виготовлені з круглої гумки. Під час роботи з моделлю вершина *B* переміщається по щілині. Здається, що застосування цього посібника дає цілком наочне уявлення про те, які трикутники називаються рівновеликими: учні бачать, що хоч одержувані трикутники відрізняються за своєю формою і за розмірами сторін і кутів, але все-таки вони мають однакові площі, оскільки ці трикутники мають рівні основи і рівні висоти. Все ніби-то правильно. Однак на запитання вчителя: «Які трикутники називаються рівновеликими?» — можлива така відповідь учня: «Трикутники, у яких основи і висоти однакові». Звинувачувати учня (та й учителя) тут не доводиться: сам наочний посібник спонукає учнів зробити неправильний висновок. Справа в тому, що ознака рівновеликості трикутників, що випливає з розгляду цього наочного посібника, є тільки достатньою, але не необхідною ознакою. Та це не було враховано ні під час розробки конструкції приладу, ні вчителем під час демонстрування на уроці.

Як бути вчителю у цій ситуації: не застосовувати зовсім наочний посібник, чи прийняти його з деякими застереженнями? Учитель, взагалі кажучи, може відмовитися від застосування наочного посібника, якщо він не задовольняє з деяких міркувань, але в такому випадку з метою формування в учнів необхідних образних уявлень він повинен використати інші види наочності, наприклад набори рівновеликих фігур. Посібник, який розглядається, можна продемонструвати на уроці, але з тією умовою, що викладач підкреслить: тут подано лише окремий (частинний) випадок рівновеликих трикутників, коли основи рівні і висоти рівні.

Відмітимо також, що в деяких випадках спостерігається надмірне захоплення наочними засобами заради ілюстрації виведених правил, законів, теорем. Часто такою ілюстрацією намагаються підкріпити правильність добре зрозумілих логічних виводів, принижуючи тим самим значення дедуктивних умовиводів. Інколи можна спостерігати ігру в «наочність», коли наочні засоби демонструють задля їх самих. Досить рідко засоби наочності використовуються для розв'язування різних практичних задач, майже зовсім не знаходять застосування на уроках математики різноманітні пристрої, устаткування і прилади з чітко вираженими математичними принципами їх дії.

3.2. Друковані засоби навчання. Друковані засоби навчання — це таблиці, картки-завдання, зошити з друкованою основою. Розглянемо більш детально настінні таблиці, які являють собою традиційний вид навчального обладнання. Не так давно в розпорядженні вчителя був лише один тип таблиць з математики — ілюстративні таблиці. Тепер дидактичні функції таблиць значно розширені і у практиці викладання математики широко використовуються робочі і додаткові таблиці.

Робочі таблиці — це такі таблиці, за матеріалом яких можна організувати активну розумову діяльність учнів з метою засвоєння нового матеріалу і його закріплення. За допомогою робочих таблиць можна

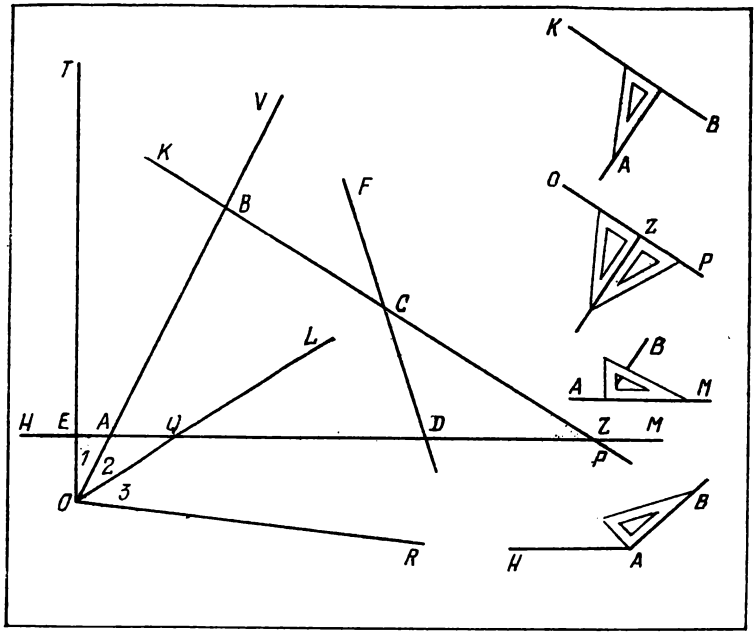


Рис. 72

здійснити виконання великої кількості вправ, які сприяють формуванню і закріпленню в учнів певних навичок, можна організувати опитування учнів або створити проблемну ситуацію перед усім класом.

На відміну від робочих таблиць **довідникові таблиці,** тобто таблиці для запам'ятовування, призначені для тривалого впливу на зоровий апарат учня. Такі таблиці можна вивішувати в кабінеті математики на довгий час. Таким чином, основною властивістю довідкових таблиць є (крім наочності, яка в ряді випадків відіграє важливе значення) їх дидактична спрямованість. Ці таблиці призначені для примусового впливу на пам'ять учня з метою запам'ятовування основних фактів, формул, графіків і ін.

Наведемо приклади робочої і довідкової таблиці. У комплекті таблиць з курсу математики для V класу* є таблиця «Кути» (рис. 72). Це робоча таблиця, яку вчитель часто використовує і під час пояснення, і під час опитування, і під час закріплення.

Подаємо деякі типи завдань, які можна виконати за допомогою цієї таблиці.

1. Знайдіть на таблиці кут, позначений цифрою 2. Як можна позначити його трьома буквами?

2. Знайдіть кут *BCD*. Чи можна його позначити *KCD*? *CBD*?

3. Чи перетинаються сторони кута *3* прямими *KP* і *FD*?

---

* Див.: Таблицы по математике для IV класса / Под ред. В. Г. Болтянского. М.: Просвещение, 1970.

4. Знайдіть гострі (прямі, тупі, розгорнуті) кути.

5. Кути *1*, *2*, *3* рівні (перевірте). Для яких з побудованих на таблиці кутів проведені бісектриси? Доведіть, що промінь *OA* дійсно є бісектрисою кута *EOQ*.

6. Знайдіть взаємно перпендикулярні прямі. (Важливо, щоб учні побачили не тільки взаємну перпендикулярність прямих *AE* і *OE*, *OB* і *BC*, але й *OQ* і *CD*: ці прямі перетинаються в точці *C*, утворюючи прямий кут.)

7. Покажіть суміжні кути, вертикальні кути.

8. Укажіть віддаль від точки *A* до прямої *OT* і до прямої *KP*; від точки *C* до прямої *OV*, до прямої *OQ* і до прямої *HM*.

Таблиця має довідковий матеріал, який дозволяє нагадати (у випадку, коли це потрібно), яким чином за допомогою креслярського кутника встановити, чи кут є прямим, тупим і т. д.

Як другий приклад візьмемо таблицю 9 «Співвідношення між сторонами і кутами прямокутного трикутника» з комплекту таблиць з геометрії для VIII класу*.

На таблиці подано креслення трикутника, необхідне для виведення залежностей між сторонами і кутами прямокутного трикутника. Для більшої наочності кут і протилежна сторона відмічені одним кольором. Цим самим кольором написані букви, які позначають вершину кута і довжину сторони. Співвідношення між сторонами і кутами записані формулами у вигляді схем, які дають змогу запам'ятати ці формули. Таблицю слід повісити в класі на довгий час; застосовуючи формули для розв'язування задач, учні поступово запам'ятовують їх. Це приклад довідникової таблиці.

Отже, ми розглянули класифікацію стінних таблиць за їх дидактичними функціями, тобто за тим призначенням, яке вони мають у викладанні математики. На закінчення відмітимо, що видавництво «Просвещение», яке випускає комплекти таблиць з шкільного курсу математики, забезпечує кожну таку серію таблиць поширеними методичними вказівками, з якими слід уважно познайомитися під час підготовки до уроку. Тут учитель знайде типи завдань, які можна виконати за допомогою таблиці, педагогічні ситуації, в яких доцільно використати таблицю.

Посібником, що сприяє підвищенню активності і свідомості навчання математики, є також **картки з завданнями**, які захоплюють учителів перш за все тим, що за їх допомогою заощаджується час уроку. Картки з завданнями дозволяють швидко навантажити учня готовим навчально-пізнавальним матеріалом. Текст, креслення, схема, рисунок — взагалі будь-яке плоске зображення — можна виконати на картці і запропонувати учневі для обробки. За допомогою карток учитель може не тільки провести самостійну роботу з тільки що пройденого матеріалу, а й перевірити знання з давно вивченого матеріалу, але необхідного для початку вивчення нової теми.

---

* Див.: *Михайловская Ю. А., Садчиков В. А.* Таблицы по геометрии для VIII класса. М., 1978.

Картки з завданнями допомагають вчителю внести елемент індивідуального навчання під час колективної роботи в класі. Вони дають можливість здійснити індивідуалізацію і диференціацію навчання.

Картки з завданнями доцільно складати з усіх тем курсу математики. Публікація «Дидактичних матеріалів» для кожного класу з шкільної програми дозволяє прискорити виготовлення карток. Купивши декілька комплектів цих матеріалів, учитель наклеює їх на цупкому папері і вирізує картки. Природно, виникає проблема організації зручної картотеки, з якої вчитель міг би легко вибрати потрібну картку. Для цього можна використати бібліотечні методи: зберігати картки в каталогових ящиках з поділом на класи і теми програми.

Великі можливості виховання самостійності і активності відкриваються під час використання **зошитів з друкованою основою**. Однак на сьогодні їх використання в практичній роботі вчителя математики обмежене. Зошити з друкованою основою призначаються для самостійної роботи на етапі закріплення і повторення пройденого матеріалу. Основна відмінна особливість зошита в тому, що він дозволяє більш раціонально використати навчальний час, оскільки учні звільняються при роботі з зошитом від механічного переписування тексту завдань і основну увагу зосереджують на виконання завдань, вміщених в зошиті. Наведемо як приклад фрагмент зошита з друкованою основою з теми «Прямокутний паралелепіпед» і розглянемо застосування зошита у навчальній діяльності учнів.

Прямокутний паралелепіпед — це такий многогранник, у якого 6 граней і кожна грань являє собою прямокутник.

Завдання 1. Заповніть пропуски в таких реченнях.

Щоб дізнатися, чи є многогранник прямокутним паралелепіпедом, треба:

1) підрахувати, скільки в нього граней; у прямокутного паралелепіпеда ... граней;

2) подивитися, чи всі грані многогранника являють собою прямокутники. У прямокутного паралелепіпеда всі грані ... .

Завдання 2. З'ясувати, чи являє собою це тіло (рис. 73) прямокутний паралелепіпед.

Р о з в' я з а н н я. Лічимо, скільки граней має цей многогранник. Їх ... . У прямокутного паралелепіпеда повинно бути ... граней. Перевіряти другу умову не потрібно.

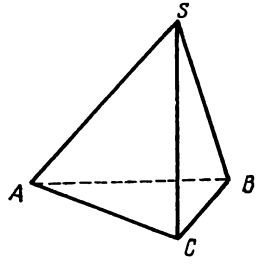


Рис. 73

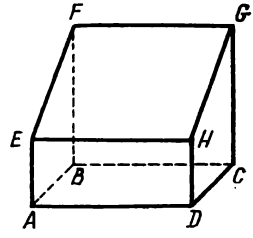


Рис. 74

Відповідь. Цей многогранник не є ... .

Завдання 3. Визначити, чи являє собою цей многогранник (рис. 74) прямокутний паралелепіпед.

Розв'язання 1. З'ясуємо, скільки граней має цей многогранник. Він має ... граней. У прямокутного паралелепіпеда теж ... граней.

2. Подивимося, чи всі грані — прямокутники.

Грань *ABCD* — прямокутник.

Грань *AEHD* — ... .

Грань *BCGF* — ... .

Грань *GHF* — ... .

Грань *FGH* — ... .

У прямокутного паралелепіпеда всі грані — прямокутники.

У тіла *ABCDE* ... .

Відповідь. Це тіло — ... .

Завдання 4. З'ясувати, які з тіл, що зображені на рис. 75, є прямокутними паралелепіпедами.

Розв'язання. Перша умова (число граней 6) виконується у тіл ... Друга умова (всі грані — прямокутники) виконується у тіл...

Відповідь. Прямокутними паралелепіпедами є тіла ... Тіла ... не є прямокутними паралелепіпедами.

Завдання 5. Заповніть пропуски в таких реченнях.

Прямокутним ... називається многогранник, у якого: 1) ... граней і 2) кожна грань ...

У прямокутного паралелепіпеда 6 ... ребер і ... вершин. ... — це такий прямокутний паралелепіпед, у якого всі грані рівні квадрати.

Як бачимо з наведеного фрагменту, зошити з друкованою основою мають велику кількість завдань. Мета завдань різна. Так, завдання 1—4 вміщені в зошит з метою дати учневі приклад (взірець) способу міркувань при з'ясуванні належності до відповідних понять. Завдання 5 немов би завершує роботу над означенням поняття «прямокутний паралелепіпед». Розв'язання, подані в зошиті, мають пропуски в тексті, які учні повинні заповнити під час роботи з зошитом. Причому пропущені не випадкові слова, а такі, які змушують учня зайвий раз звернутися до означень, задуматися над послідовністю операцій і т. п.

Наведемо ще два приклади з того самого зошита з друкованою основою. Вони включені тому, що мають приклади розв'язування таких задач.

Завдання 21. Скільки сантиметрів дроту пішло на виготовлення каркасу цього прямокутного паралелепіпеда (рис. 76)?

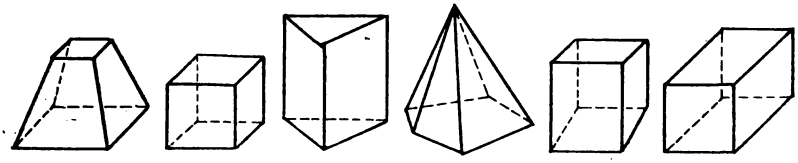


Рис. 75

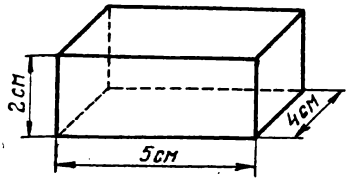


Рис. 76

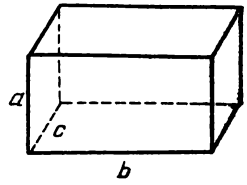


Рис. 77

Розв'яжіть задачу різними способами.

Перший спосіб:

1. На ребра нижньої основи пішло ... см.
2. На ребра верхньої основи пішло ... см.
3. На вертикальні ребра пішло ... см.
4. Всього на каркас пішло ... см.

Другий спосіб:

1. На три нерівних ребра пішло ... см.
2. Всього на каркас пішло ... см.

Третій спосіб:

У прямокутному паралелепіпеді є четвірка рівних ребер.

1. На ребра довжиною 2 см пішло ... см.
2. На ребра довжиною 5 см пішло ... см.
3. На ребра довжиною 4 см пішло ... см.
4. Всього на каркас пішло ... см.

Ці обчислення можна записати в рядок:

$2 \cdot 4 + 6 \cdot 4 + 4 \cdot 4 = (\ldots + \ldots) \cdot 4 = \ldots$.

Завдання 22. Знайдіть суму довжин ребер даного прямокутного паралелепіпеда (рис. 77).

Перший спосіб:

1. Ребер по a см тут 4. Сума їх довжин дорівнює $4a$ см.
2. Ребер по b см тут ... . Сума їх довжин дорівнює ... см.
3. Ребер по ... см тут ... . Сума їх довжин дорівнює ... см.
4. Сума довжин усіх ребер дорівнює ... см.

Другий спосіб:

1. Сума довжин трьох вимірів дорівнює $(a + \ldots + \ldots)$ см.
2. Сума довжин усіх ребер дорівнює $4\ (\ldots + \ldots + \ldots)$ см.

Пояснити, чому відповіді, які одержано в першому і другому випадку, рівні між собою.

Отже, зошит з друкованою основою дає можливість відпрацьовувати поняття і прищеплювати учням навички розв'язування типових задач.

Крім того, зошит може підказати шлях розв'язування нестандартних задач і може бути успішно використаний тоді, коли формулювання задачі, пов'язане, наприклад, з кресленням, займає непропорційно багато часу й праці в порівнянні з процесом розв'язання.

Ось приклади.

Завдання 13. Закінчити побудову зображення куба (рис. 78).

Завдання 58. Об'єм прямого куба (рис. 79) дорівнює сумі об'ємів кубів трьох останніх. Чому дорівнює ребро першого куба?

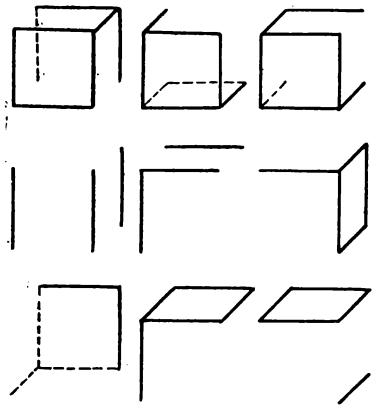


Рис. 78

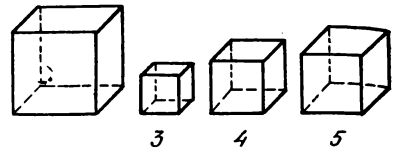


Рис. 79

Розв'язання. За таблицею кубів знаходимо, що:
об'єм куба з ребром 3 дорівнює ...;
об'єм куба з ребром 4 дорівнює ...;
об'єм куба з ребром 5 дорівнює ... .
Значить, сума об'ємів усіх трьох кубів дорівнює $27 + ... + ... = ...$, а це і є об'єм першого куба. За таблицею кубів знаходимо, що його ребро дорівнює ... .

Відповідь. Ребро першого куба дорівнює ... .

3.3. Екранні засоби навчання. За останні роки в практиці навчання математики все ширше почали застосовуватися такі екранні засоби, як кінофільми, діафільми, діапозитиви, кодопозитиви. Практика використання їх на уроках математики дає можливість стверджувати, що екранні засоби сприяють підвищенню ефективності навчальної роботи з математики, допомагають формувати в учнів більш міцні, осмислені знання, привчають економно витрачати навчальний час.

Із наявних екранних засобів у навчальній роботі з математики найбільш поширені у дев'ятирічній і в середній школах діафільми завдяки багатим дидактичним можливостям їх використання у навчальному процесі.

Розглянемо лише деякі з цих можливостей.

1. Діафільм дозволяє миттю подати на екран готовий навчальний матеріал (текст, рисунок, креслення), що сприяє економії навчального часу на уроці.

2. Діафільм дозволяє одночасно працювати всьому класу з кадрами, які входять до його змісту. При цьому увага всіх учнів спрямована до зображення на екрані, яке підлягає всебічному обговоренню. В міру необхідності вчитель ставить питання, що стосуються того чи іншого зображення.

3. Кадри діафільму можна розглядати на екрані стільки, скільки це потрібно для того, щоб вичерпно розібрати матеріал, що вивчається. Це дозволяє вчителю будувати своє пояснення у відповідності з рівнем даного класу, враховуючи індивідуальні особливості учнів.

4. На відміну від серії діапозитивів діафільм складається з кадрів, які розміщено у певному порядку на єдиному носієві. Це дозволяє автору викладати теоретичний матеріал у діафільмі послідовно, з позицій передової методики. А через те, що порядок кадрів у діафільмі змінити не можна, то вчитель, працюючи з діафільмом, веде виклад програмових питань методично правильно. Таким чином, діа-

фільм виконує роль зручного методичного помічника вчителя. Крім того, цілісність, послідовність робить їх надто серйозним засобом керування пізнавальною діяльністю учнів.

Нагадаємо, що діафільм — це серія кадрів, об'єднаних смисловим зв'язком і розміщених послідовно на прозорій стрічці. Зв'язок між кадрами діафільму визначається змістом навчальної теми і структурою її вивчення в школі. У діафільмах учитель чітко відчуває закладену в них методичну послідовність, структуру побудови уроків. Молодому вчителю ця визначеність (наперед) методичних позицій може допомогти в оволодінні майстерністю викладання. Досвідчений же вчитель при бажанні може відійти від закладеної в діафільмі методики, пристосувавши виклад до особливостей свого класу. Але в кожному випадку робота з діафільмом повинна сприяти оптимізації навчального процесу. Щоб досягти цього, необхідно виконувати загальні дидактичні вимоги щодо використання діафільмів: 1) обов'язково роз'яснювати учням пізнавальну задачу, проблему так, щоб вона стала їхньою задачею; викликати інтерес до них, мобілізуючи пізнавальні зусилля учнів і, перш за все, їх увагу; 2) обговорювати з учнями способи розв'язування задачі, проблеми, розробляти гіпотези і шляхи їх перевірки; 3) відновити в пам'яті учнів попередній пізнавальний досвід, необхідний для засвоєння нового, що передається безпосередньо за допомогою діафільму; 4) підготовивши учнів до сприймання матеріалу діафільму, не відмовлятися від керівництва пізнавальним процесом під час використання діафільму на уроці, звертати увагу учнів у потрібних випадках на головні об'єкти, ставити додаткові питання і, якщо необхідно, обговорювати їх. Велике значення для правильного застосування діафільмів має і врахування вікових особливостей сприймання школярами матеріалу. Максимальна тривалість роботи з діафільмами для учнів VII—IX класів не повинна бути більшою 20 хв. При цьому кількість кадрів, які демонструються на одному уроці, не повинна перевищувати 10—15. У протилежному випадку спостерігається помітний спад засвоєння інформації.

Ефективність навчання за допомогою діафільмів залежить від вибору прийомів їх використання. Часто вчитель зводить свій коментар лише до читання субтитрів (надписів на кадрі), що виправдано лише тоді, коли в ролі надпису дано означення нового поняття або завдання до кадру. В інших випадках субтитр повинен входити складовою частиною до розповіді або бесіди вчителя з теми, якій присвячено діафільм або окрема його частина. Щоб домогтися цього, вчитель повинен добре знати зміст діафільмів.

Результативність роботи з діафільмом залежить також і від того, в яких умовах проходить його демонстрація. Недоцільно затемнювати приміщення, тому що на адаптацію вчителя і учнів при переході від світла до темноти і навпаки потрібно багато часу. Крім того, учням необхідно психологічно переключитися до прийняття інформації в різних умовах, що порушує стійкість уваги — якість надзвичайно важлива для успішного навчання. Демонстрація діафільмів у затемненому приміщенні по суті виключає можливість використання методів звичайної навчальної діяльності. Викладач не тільки не може запропону-

вати учням другі форми роботи, крім «дивись», «слухай», «запам'ятовуй», але й сам не спроможний керувати навчальним процесом до закінчення демонстрації діафільму.

Уникнути зазначених недоліків у роботі з діафільмами можна тоді, коли демонстрація діафільму проводиться у класі без затемнення, що досягається застосуванням діапроекторів, наприклад «ЛЭТИ-60». Це дає можливість уникнути зміни світових режимів у процесі навчання, розширює форми навчальної діяльності учнів (паралельна робота з зошитом, підручником, таблицею і т. п.), створює можливість ефективно контролювати навчальну діяльність учнів, спостерігати за їх реакцією і цілеспрямовано керувати їх пізнавальною діяльністю, а також здійснювати проекції кадрів діафільму безпосередньо на класну дошку з наступним виконанням на одержаному від проекції зображенні додаткових побудов, нанесенням необхідних позначень.

Помітно кращих наслідків у роботі з діафільмом можна досягти, якщо його використовувати в комплексі з іншими засобами навчання. Наприклад, під час вивчення паралельної проекції та її властивостей в X класі можна використати кадри діафільму «Паралельна проекція» (автор В. Семаков, студія «Діафільм», 1965 р.) у комплексі з першою частиною (фрагменти 1—7) кінофільму «Паралельна проекція» (автор сценарія А. Громов, студія «Шкілфільм», 1959 р.). Демонстрування зазначеної частини кінофільму дозволяє учням в динаміці показати, що паралельне проектування є перехід від даної фігури до фігури, що їй відповідає. У кінці демонстрування кінофрагментів проводиться виклад цього матеріалу за допомогою кадрів діафільму в темпі, який відповідає рівню інтелектуального розвитку учнів даного класу.

Розглянемо питання про те, на яких етапах навчання доцільно використовувати діафільм.

Діафільми, які випускає студія «Діафільм», призначені в основному для показу у процесі викладу нового матеріалу і на етапі початкового закріплення вивчених питань теорії. Однак їх можна використати при повторенні пройденого матеріалу, і для перевірки знань учнів.

Демонструючи діафільм під час викладу нового матеріалу, вчитель повинен широко розкрити необхідний для уроку обсяг інформації, вміщений у кадрах діафільму. Як уже зазначалось, обмежуватися лише демонстрацією кадрів з читанням надписів без коментування педагогічно недоцільно.

Розглянемо застосування у VI класі діафільму «Геометричні перетворення» (автор М. Волович, «Діафільм», 1976 р.). Перш за все його кадри призначені для обговорення матеріалу з усіма учнями в класі. Наприклад, кадр *1* (рис. 80) дає змогу підготувати учнів до знайомства з тими геометричними перетвореннями, які вивчаються в курсі VI класу. Учитель може дати класу таку, наприклад, задачу: «Як треба сумістити аркуш, на якому «відпечаталась» верхня ліва фігура з правою нижньою фігурою? З правою верхньою фігурою?» Під час обговорення учні, які ще нічого не знають ні про центральну, ні про осьову

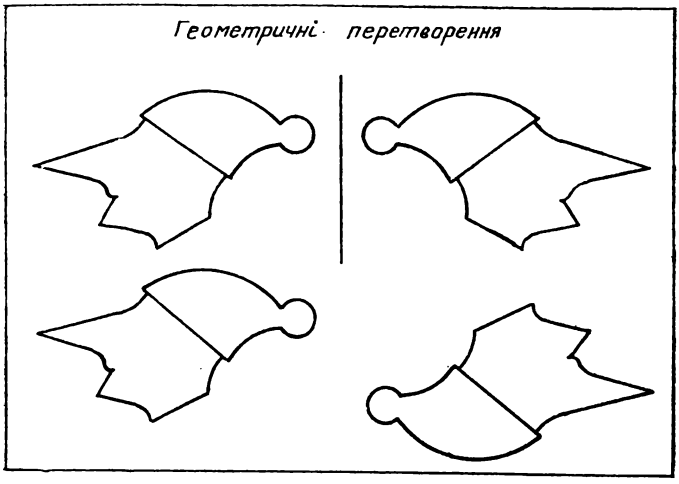


Рис. 80

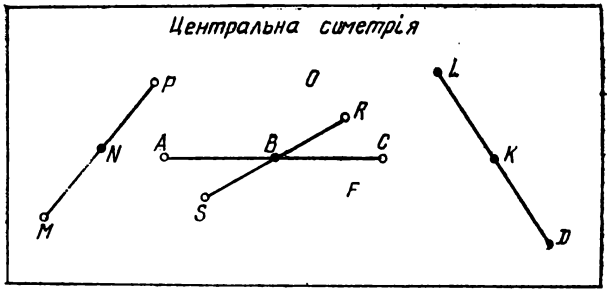


Рис. 81

симетрію, фактично одержать перше уявлення про ці перетворення. Кадр *4* (рис. 81) дає достатній матеріал для того, щоб підвести учнів до означення центрально-симетричних точок. Основою кадра *5* є рис. 82. Над ним у кадрі вміщено текст: «Дві точки *A* і *B* називаються симетричними відносно точки *O*, якщо точка *O* — середина відрізка *AB*». Під рисунком текст: «Назвіть точки, симетричні відносно точки *O*».

В ході обговорення тексту, який вміщено в кадрі, слід з'ясувати, що для визначення симетричності двох точок *A* і *B* відносно точки *O* необхідно перевірити наявність двох властивостей: 1) точка *O* належить відрізку, що сполучає дані точки *A* і *B*; 2) точка *O* є середина відрізка *AB*. Наявність у кадрі креслення, на якому є пари точок, симетричних відносно точки *O*, допомагає вчителю організувати фронтальну роботу учнів, спрямовану на закріплення означення.

Методика використання діафільмів під час повторення і закріплення вивченого матеріалу менш складна, ніж в попередньому розглянутому випадку. За допомогою діафільму проводити повторення

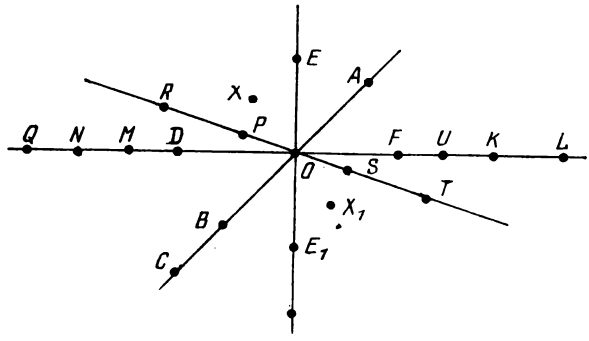


Рис. 82

доцільно після того, як буде закінчено вивчення теми програми або цілого розділу. При цьому слід тільки враховувати, що повторення повинно сприяти систематизації пройденого, встановленню зв'язку між окремими положеннями, порівнянню з вивченим раніше. Добрих результатів при повторенні можна досягти і у випадку, коли використовується діафільм, який розкриває практичне застосування вивчених питань теорії. Наприклад, під час повторення теми «Чотирикутники» можна використати перший фрагмент діафільму «Практичне застосування геометрії» (автор В. Семаков, студія «Діафільм», 1963 р.), де розглянуто практичне застосування властивостей паралелограма, ромба, прямокутника.

Ефективним засобом навчання є і *діапозитиви*. Вони допомагають організувати проведення самостійних і контрольних робіт, опитування і т. д. Особливо корисно застосовувати діапозитиви під час навчання розв'язуванню задач. На відміну від діафільмів серія діапозитивів складається з розрізнених кадрів. Тому, готуючись до уроку, вчитель може відібрати необхідні йому діапозитиви навіть з різних серій і розмістити їх у потрібному порядку для демонстрування на уроці. Відбираючи діапозитиви та порядок їх слідування, враховують як можливості класу, так і особливості прийнятої методики викладання.

Перейдемо до характеристики *кінофільмів*. У викладанні математики застосовуються повнометражні (тривалість демонстрування більше 10 хв) і короткометражні (тривалість демонстрування до 10 хв.) фільми. Більшість з випущених повнометражних (цілісних) фільмів з математики мають оглядовий характер. Це кінофільм-екскурсія, кінофільм з історії математики, кінофільм, присвячений матеріалу, що являє собою самостійний розділ курсу математики, наприклад «Тригонометричні функції». Довготривале демонстрування повнометражного фільму виключає викладача з навчального процесу. Він не може тут же пояснити учням важке місце, обговорити різні способи досягнення того ж явища чи розв'язку. В свою чергу учні змушені відкладати «на потім» свої запитання до вчителя. Тому найбільш ефективні повнометражні кінофільми при повторенні, закріпленні, узагальненні матеріалу.

Короткометражні фільми (кінофрагменти, кінокільцівки), звичайно, присвячуються розгляданню одного — двох питань курсу математики і використовуються на уроці під час попереднього ознайомлення з новим матеріалом. Демонструвати кінофільми бажано при неповному затемненні приміщення, щоб учні мали можливість у випадку необхідності відмітити щось у зошитах. Тоді зростає можливість обговорити кінофрагмент після його демонстрування.

На відміну від кінофрагменту кінокільцівку можна показати підряд будь-яке число разів. При многократному повторенні кадрів кінокільцівки вчитель одержує можливість залучати увагу учнів, які не мають добре розвинених навичок спостереження, добрих просторових уявлень і просторової уяви. Використання кінокільцівок дає змогу не тільки пояснити учням послідовність доведень теорем або послідовність розв'язування задачі, але й тренувати учня. Можна, наприклад, після перегляду матеріалу в звуковому варіанті знову показати його без звуку з коментарем учня. Таким чином, кінокільцівка є досить ефективним кінопосібником і її слід використовувати в усіх випадках, коли дозволяє матеріал.

Отже, найбільш типовим для уроку математики є використання коротких кінофрагментів, які органічно включаються до складу уроку. Однак ефективність використання кінофільмів на уроках математики залежить не тільки від характеру кінопосібника, але й від рівня підготовлення учнів до сприймання кіноінформації. Для цього вчителю необхідно самому переглянути кінофільм, установити, на що звернути особливу увагу під час його огляду, поставити перед класом запитання по змісту фільму, організувати обговорення фільму після його огляду. Тільки проведення старанної підготовчої роботи, організація цілеспрямованої діяльності учнів під час і після огляду кінофільму можуть дати бажані результати.

Поруч з проекторами для демонстрування кінофільмів, діафільмів і діапозитивів у практиці навчання математики досить широко застосовується ще один вид проектора — це кодоскоп або класна оптична дошка. Нещодавно в школі застосовувалась застаріла модель кодоскопа з робочим вікном розмірами 104 × 140 мм. На зміну йому прийшов сучасний апарат — графопроектор «Лектор-2000» з вікном, що відповідає світовому стандарту (250 × 250 мм).

За допомогою графопроектора можна будь-який навчальний матеріал (текст, креслення, рисунок), нанесений на прозору основу фотографічним або графічним способом, спроектувати на екран або класну дошку. Матеріали на прозорій основі для графопроектора будемо називати кінопозитивами або транспарантами.

Розглянемо можливості, які з'являються під час застосування графопроектора на уроках математики:

1. Графопроектор дає чітке і порівняно великих розмірів зображення, що дозволяє проектувати кодопозитив безпосередньо на дошку, на якій можливо крейдою добудувати зображення, доповнити його і т. д.

2. Учитель може не тільки користуватися заздалегідь заготовленими кодопозитивами, але й показувати за допомогою графопроектора

записи, безпосередньо виконані на уроці. З цією метою можна використати будь-який аркуш прозорого матеріалу — целофану, целульози, поліетилена і т. д. На екрані учні відразу ж побачать усі записи, які виконує учитель. Можна частину записів підготувати заздалегідь, до уроку, а в класі лише доповнити їх.

3. Істотно, що при роботі з графопроектором учитель весь час стоїть обличчям до класу і може спостерігати за учнями і ефективніше керувати їх роботою. Це створює ряд переваг у порівнянні з традиційним методом роботи на дошці.

4. Під час використання графопроектора можна накласти кілька кодопозитивів один на одного, чим досягається ефект присутності при побудові і створюються можливості для складання умов задач на комбінації геометричних тіл, на графічне розв'язування рівнянь та їх систем, на побудову перерізів і т. д. Викликає інтерес і можливість суміщення кодопозитивів один відносно одного при їх суміщеному показі, наприклад при вивченні геометричних перетворень.

5. Нові можливості досягаються при використанні графопроектора в процесі опитування учнів. Їм пропонується на аркушах плівки написати доведення теореми, вивід формули, розв'язання задачі і т. п. Після цього записи учнів демонструються через графопроектор усьому класу. Якщо при цьому виявиться, що треба внести виправлення, учень повертається з виконаними на плівці записами на своє місце, де й ліквідує допущені недоліки. Графопроектор зручно використовувати в процесі пояснення і закріплення нового матеріалу, при виконанні різних математичних вправ і розв'язування задач, під час проведення самостійних і контрольних робіт, для організації індивідуальної роботи з учнями на уроці, для запису домашнього завдання. Незамінимий графопроектор і в позакласній роботі, при розв'язуванні цікавих і логічних задач, розгадуванні ребусів.

Розглянемо детальніше застосування кодопозитивів. Пояснення нового матеріалу на уроці часто зв'язано з доведенням різних теорем. Для кращого засвоєння як умови, так і доведення теореми вчитель може наперед заготовити набір кодопозитивів. Наприклад, на першому кодопозитиві учитель виконає запис формулювання теореми, на другому — креслення до теореми, на третьому — допоміжні лінії, на четвертому — запис початку доведення і на п'ятому — запис останньої частини доведення теореми. Маючи такий набір кодопозитивів, учитель спочатку кладе на конденсорну лінзу графопроектора перший з них і обговорює з учнями формулювання теореми. Потім накладає зверху другий кодопозитив, і на екрані поруч з записом теореми з'являється креслення. Тепер учитель має можливість обговорити різні способи доведення теореми. При цьому, якщо зображення проектується на дошку, можна попросити учнів намітити на дошці (крейдою) ті допоміжні лінії, які будуть потрібні для здійснення доведення. Якщо лінії проведені неправильно, їх можна витерти, а креслення, що створюється на дошці графопроектором, залишиться. Після обговорення можна витерти всі записи на дошці і накласти третій кодопозитив з нанесеними на ньому допоміжними лініями. Коли учні перенесуть у свої зошити креслення, учитель накладає четвертий аркуш з за-

писом початку доведення. Нарешті, після того, як ця частина доведення обговорена і перенесена учнями в зошит, учитель накладає останній, п'ятий кодопозитив і обговорює кінець доведення. Для того щоб «витерти» все написане, досить зняти кодопозитиви з графопроектора. При необхідності вчитель може швидко повторити все доведення, накладаючи ще раз один за одним кодопозитиви.

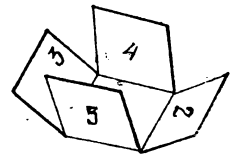


Рис. 83

Для того щоб суміщення кодопозитивів при їх накладанні один на одного було більш точним, їх краї з'єднують за допомогою липкої стрічки. Таким способом можна з'єднати до п'яти кодопозитивів (рис. 83).

Застосування накладеного кодопозитиву дає можливість учителю в будь-який момент буквально за кілька секунд відновити потрібний етап розв'язання задачі.

Ще одна форма роботи з графопроектором — зміщення двох або більшої кількості транспарантів відносно один одного при їх спільному показі. Для ілюстрації розглянемо такий приклад. Учитель має два транспаранти, на одному з яких зображена координатна площина, а на другому — графік функції $y = x^2$, але без вісей координат. За допомогою цих транспарантів учитель може: а) по-різному накладаючи один на одного, задавати питання про знаки коефіцієнтів a, b, c графіка тричлена $y = ax^2 + bx + c$, який при цьому одержали, про знак дискримінанта, про характер коренів, про координати вершин і т. д.; б) ілюструвати зміщення графіків, тобто перехід від графіка $y = f(x)$ до графіка $y = f(x + p) + q$ на прикладі функції $y = x^2$; в) задавати учням питання типу: «Який буде вигляд графіка тричлена $y = ax^2 + bx + c$, у якого $a < 0$, а обидва корені від'ємні?» і пропонувати їм відповідати на ці питання, виконуючи при цьому переміщення транспаранта з параболою на графопроекторі; г) ілюструвати розв'язання квадратних нерівностей і т. д. Більш того, маючи крім транспарантів з зображенням координатної сітки і параболи ще один, на якому нанесена пряма лінія, можна, по-різному накладаючи транспаранти з прямою і параболою на координатну сітку, ілюструвати графічне розв'язання системи рівнянь виду

$$y = x^2 + px + q;$$
$$ax + by + c = 0.$$

Під час проведення самостійних і контрольних робіт доцільно використати завчасно підготовлені кодопозитиви з текстами завдань. При перевірці результатів виконання самостійних робіт можна робити так: учням пропонують завдання, яке деякі учні виконують на плівці. За допомогою графопроектора записи проектуються на дошку. Роботу учня будуть бачити всі, її корисно обговорити. При аналізі помилок, допущених у самостійних і контрольних роботах, можна показати цілі кодофільми (стрічки), на яких вказані помилки і прізвища учнів, які їх допустили.

Підведемо підсумки. Існують два основних способи використання графопроектора на уроках математики. Перший — виготовлення са-

моробних кодопозитивів і показ їх на уроці. При такому застосуванні графопроектор аналогічний діапроектору, хоч і має перед ним певні переваги: більша яскравість зображення на екрані і більша зручність під час креслення зображення (за рахунок розмірів кадру). Саме так використовується графопроектор під час проведення опитування учнів. Однак найбільш істотним для уроку математики є другий спосіб використання графопроектора — створення на екрані або на дошці зображень, частини яких можуть переміщатися відносно одна одної, доповнюватися частинами зображення, які знову виникають, надписами, підкреслюваннями.

Зрозуміло, що динаміка зображень, які створюються за допомогою графопроектора, має свої рамки і обмеження: фігури, що переміщаються, не можуть змінювати свої розміри і форму, не можна показати подібний розтяг фігур або поворот многогранника в просторі і т. д. І все-таки, не дивлячись на ці обмеження, графопроектор можна охарактеризувати як динамічний екранний посібник навчання.

§ 4. ОРГАНІЗАЦІЯ І ОБЛАДНАННЯ КАБІНЕТУ МАТЕМАТИКИ

Як уже відмічалось, підвищення якості навчання математики практично неможливо здійснити без широкого використання у навчальній роботі різноманітних засобів. Так, у сучасних умовах учитель часто починає урок математичним диктантом за допомогою магнітофону з метою перевірки засвоєння раніш вивченого матеріалу, демонструє кінофрагмент, супроводить виклад нового матеріалу показом діафільму, проводить закріплення матеріалу за допомогою діапозитивів, пропонує виконати завдання у зошиті з друкованою основою, використовує брошури з завданнями для організації самостійної роботи, видає домашнє завдання за допомогою кодопозитива, застосовуючи при цьому графопроектор.

Переносити все обладнання, необхідне для такого уроку математики, із класу в клас неможливо, до того ж повноцінне застосування різноманітних засобів навчання в таких умовах нездійсненне.

Досягнення високих результатів у навчанні математики з застосуванням різноманітних видів навчального обладнання і технічних засобів можливе при умові, якщо в школі обладнано кабінет математики, в якому все «до останньої дрібниці» сприяє удосконаленню навчально-виховної роботи з предмету.

Стіл учителя і робоче місце учня, класна дошка і шафи для зберігання засобів навчання, затемнення приміщення класу та інші пристосування і предмети обладнання мають бути максимально зручними для роботи. Кожний засіб навчання (модель, діафільм, таблиця, кінофрагмент, кодопозитив і т. д.) повинен бути органічною частиною системи, яка забезпечує високий рівень засвоєння математичних знань, і таким, щоб сприяти активізації пізнавальної діяльності школярів.

Отже, кабінет математики — це навчальний підрозділ школи, що являє собою єдину, органічно зв'язану систему навчального обладнання, яка дозволяє оптимізувати навчально-виховний процес на уроці і в позакласній роботі з математики.

Кабінети математики оснащуються:

1. Повним комплектом навчального обладнання з математики у відповідності з «Типовим переліком навчально-наочних посібників і навчального обладнання для загальноосвітніх шкіл».

2. Навчальним обладнанням, виготовленим вчителем з залученням учнів, в доповнення до переліку.

3. Комплектом дидактичних карток з завданнями для здійснення індивідуального підходу у навчанні, організації самостійних робіт та вправ, проведення контрольних робіт.

4. Комплектом технічних засобів навчання (кінопроектор, епідіаскоп, графопроектор, магнітофон, телевізор) і пристосуваннями для їх використання (екран, зашторювання, підставки до апаратури, пристрій дистанційного керування).

5. Математичною бібліотечкою і бібліографічною картотекою до неї.

6. Комплектом навчально-методичних посібників.

7. Набором кращих письмових і екзаменаційних робіт, виконаних учнями.

8. Інструментами та матеріалами для роботи по виготовленню посібників.

9. Картотекою навчального обладнання для вивчення кожного питання програми (або пункту підручника).

10. Картотекою — описом навчального обладнання і технічних засобів навчання, що входять до оснащення кабінету.

Робота в кабінеті математики регламентується рядом документів, прийнятих Міністерством освіти. Це перш за все методичні рекомендації «Про навчальні кабінети загальноосвітньої школи», які визначають напрям і організацію роботи кабінету. На основі цих рекомендацій розробляється положення про кабінет математики. Другим документом, виконання вимог якого є обов'язковим для всіх, хто працює в кабінеті, є «Правила з техніки безпеки для кабінету математики».

Під час експлуатації технічних засобів навчання слід додержувати «Гігієнічних рекомендацій по використанню технічних засобів навчання (екранно-звукових, екранних і звукових) у навчальному процесі».

Планування кабінету математики в більшості залежить від розмірів і форми приміщення, розміщення дверей, встроєних шафів та інших факторів. Але незалежно від цього в будь-якому кабінеті математики на передній стінці його закріплюється класна дошка, над дошкою — світильники, пластиковий екран (типу ЕПП-1 або ЕПП-2), пристрій для демонстрування довідкових таблиць. Під дошкою — ящики для зберігання таблиць і готовальня для класних креслярських інструментів. Якщо дошка закриває не всю передню стінку, то збоку від неї можна закріпити демонстраційні прилади типу «Електросвітлове табло». Найзручнішою є класна дошка з розгорнутими полами. Якщо ж віддаль від передньої стіни до столів учнів невелика, можна використати розсувну дошку. Поверхню однієї поли розгорнутої дошки можна оббити залізом, що дозволяє демонструвати посібники

з магнітним кріпленням. На поверхню другої наноситься координатна сітка. Уподовж верхнього краю дошки до стіни прибивається планка, на якій закріплюються картотримачі для підвішування робочих таблиць.

Середня частина розсувної класної дошки — аркуш заліза, покритий білою фарбою (магнітна дошка-екран). Дошка має чотири висувних поля. На обох сторонах кожного з них можна писати крейдою (поля повністю виймаються з напрямлюючих і перекидаються зворотною стороною до класу).

На бічній стіні класу напроти вікон можна змонтувати експозиційний щит — магнітну дошку, обклеєну декоративною плівкою, на якій за допомогою магнітів закріплюються довідникові таблиці та інші матеріали.

На задній стіні кабінету, звичайно, розміщують секційні шафи для зберігання навчального обладнання і підставку для технічних засобів навчання — кінопроектора «Райдуга» або «Україна», діапроекторів «ЛЕТІ-60», «Світязь-М» або «Лектор-600». Діапроектор можна поставити і на стіл учителя, якщо при цьому текст на екрані буде читатися з самої далекої точки класу.

Система затемнення на вікнах кабінету забезпечує нормальні умови демонстрування кіно- і діафільмів. Штори виготовляються з цупкої драпірувальної тканини з підкладкою із темного матеріалу, насиченої вогнестійкою речовиною. Їх довжина і ширина повинні бути на 20—30 см більше розмірів вікна. Штори можуть рухатися горизонтально чи вертикально, ручним способом або за допомогою реверсивного електромотору.

Стіл учителя може мати різну конструкцію, бажано для зручності з тумбою для графопроектора і ящиком для магнітофона. Стіл з графопроектором установлюється на початку середнього ряду. До нього підводиться захована електропроводка. Магнітофон використовується для організації оперативного контролю у формі математичних диктантів: на магнітній стрічці записані у двох варіантах тексти завдань (чоловічим голосом — перший варіант, жіночим — другий). У цих цілях можна використати будь-який котушковий магнітофон, наприклад «Комета», «Астра», або касетний «Тоніка», «Електроніка», «Весна». Звукозаписи зберігаються у коробках, на яких зазначається швидкість запису, для якого класу і до яких пунктів підручника записаний диктант. У коробку вкладаються тексти диктантів з відповідями до завдань.

На столі вчителя можуть бути розміщені пульти керування електрообладнанням та контролюючим пристроєм. До пульту керування підводиться захована електропроводка від проекційної апаратури, електроосвітлення класу, системи зашторювання, магнітофону (електрофону), контролюючого пристрою.

В сучасних умовах кабінети оснащуються контролюючими пристроями різних систем (АМК-1, «Орльонок» і ін.). Кожний з них має пульт учителя і пульти учнів, які з'єднані з пультом учителя електрокабелем. Пристрій АМК-1 працює за методом вибіркових відповідей: учням пропонують завдання і декілька відповідей до нього, одна з

яких правильна. Розв'язавши задачу, учень вказує номер відповіді (на пульті вчителя, якщо відповідь правильна, засвічується лампочка). Пристрої «Орльонок» і «Диск-18» працюють за методом відповідей, які вільно контролюються: учень, розв'язавши задачу, набирає відповідь за допомогою диска (як на телефоні). Для цього на диску розміщено круг з усіма математичними знаками, що використовуються у школі. Якщо одержано правильну відповідь, то на пульті вчителя засвічується лампочка.

Робочі місця учнів обладнані стільцями і консольними столами на два місця. На столі розміщуються пульти контролюючого пристрою і пенал з креслярськими інструментами та папером.

Під час виконання самостійної роботи учні використовують креслярські інструменти (кутники, циркулі, трафарети), обчислювальні пристрої, гумові штемпелі, моделі геометричних тіл.

Ефективному використанню засобів навчання сприяє складання карт підготовки вчителя математики до уроку з кожного пункту підручника. У них — основний зміст пункту, форми роботи вчителя і учнів, навчальне обладнання уроку. З поповненням кабінету математики навчальними посібниками в карти вносять необхідні зміни.

Таким чином, обладнання кабінету математики підкорено головній меті — забезпеченню максимальної ефективності праці вчителя і учнів.

§ 5. ДЕЯКІ ПИТАННЯ ВИГОТОВЛЕННЯ НАОЧНИХ ПОСІБНИКІВ З МАТЕМАТИКИ

Практика показує, що в тих школах, де працюють кабінети математики, якість математичної підготовки учнів, як правило, вища.

Щоб оснастити математичний кабінет і забезпечити навчальний процес необхідними засобами, потрібні різноманітні наочні посібники, більшість з яких можуть бути виготовлені учнями і вчителем.

Процес виготовлення наочних посібників має велике виховне і освітнє значення. Під час моделювання учні вчаться креслити і читати технічні креслення; розвиваються їх конструктивні здібності, творча ініціатива, інтерес до самостійної роботи.

Розглянемо деякі питання моделювання з дроту, скла, картону.

Дротяні каркасні моделі знаходять широке застосування на уроках стереометрії. Вони дозволяють показати види, елементи і проекцію многогранника на площину (тінь моделі на аркуші білого паперу), переріз многогранника площиною, комбінації геометричних тіл.

Для виготовлення каркасних моделей потрібний залізний дріт, діаметр якого 2,5—3 мм. Порядок операцій при виготовленні може бути таким: за даними параметрами розрахувати розміри всіх елементів моделі; нарізати дріт за відповідними розмірами, запиляти кінці стержнів на відповідний кут; зачистити місця з'єднань і спаяти модель; пофарбувати модель краще в різні кольори: основний контур — одним кольором, додаткові лінії (діагоналі, висоти, перерізи та ін.) — іншим.

Щоб робота мала творчий характер, учневі слід підказати лише назву моделі, яку він повинен виготовити. У цьому випадку учень

виступає спочатку в ролі конструктора, який повинен накреслити задану фігуру, зважаючи на наявність матеріалів, розрахувати і проставити необхідні розміри на кресленні, виконати наочні зображення. Після затвердження креслення викладачем учень переходить до виготовлення моделі, виступаючи вже в ролі кваліфікованого робітника, виконавця ідеї конструктора.

Подаємо перелік каркасних моделей, які необхідні на уроках стереометрії:

1. Набір моделей правильних призм і пірамід (повних і зрізаних). Для означення розмірів усіх елементів задана висота, однакова для всіх призм і пірамід, радіус кола, описаного навколо основи. Моделі зрізаних пірамід теж повинні мати однакову висоту.

2. Набір моделей чотирикутних пірамід, вершини яких проектуються в точку перетину діагоналей основи. Крім основного контуру, модель повинна мати висоту, діагональ основи і висоти бічних граней. Всі моделі доцільно зробити однакової висоти.

3. Набір моделей до найважчих задач курсу геометрії X—XI класів.

4. Набір моделей на комбінацію многогранників.

5. Набір круглих тіл і моделей на комбінації циліндра, конуса, кулі з многогранниками.

Поруч з каркасними моделями в процесі навчання математики широко використовуються і моделі зі скла, що доцільно в тих випадках, коли треба показати в многограннику переріз або інше вписане в нього геометричне тіло.

Досвід показує, що виготовляти скляну модель в деяких випадках простіше, ніж відповідні каркасні моделі. Крім того, матеріал для виготовлення таких моделей — скло, канцелярський і силікатний клей, папір і нитки — є в кожній школі. Побудова моделі пов'язана з визначенням істинних розмірів деталей тіла, що моделюється, виготовлення цих деталей зі скла і, врешті, склеювання моделі.

Визначити істинні розміри деталей моделі можливо, якщо задані необхідні лінійні та кутові розміри геометричного тіла, модель якого учні виготовляють. Часто вихідні розміри визначаються умовою задачі, для ілюстрації розв'язування якої виготовляється модель. Визначивши розміри моделі, слід накреслити окремі розгортки на аркуші паперу, які потім використовуються як викройка для виготовлення граней моделі зі скла.

Вирізані зі скла грані моделі склеюють силікатним клеєм (можна використати столярний клей) за допомогою паперових смужок, ширина яких 5—6 мм до одержання розгортки многогранника, що виготовляється. Потім із розгортки склеюють модель. Паперові полоски, якими склеювали розгортку, в готовій моделі повинні бути всередині.

Перш ніж заклеїти останню грань, всередині моделі встановлюють необхідний переріз, вирізаний з кольорового скла, або геометричне тіло, яке буде вписано в многогранник. Після заклеювання останньої грані модель, що виготовляється,окантовують зовні смужками чорного паперу. Серед саморобних наочних посібників з стереометрії найбільш поширені картонні моделі, для виготовлення яких достатньо засвоїти

такі прості операції, як різання, перегинання і склеювання картону.

Порядок виготовлення моделі з картону такий:

1. На аркуші паперу креслять найбільш раціональну розгортку поверхні многогранника натуральної величини з клапанами для склеювання многогранника.

2. Накреслену розгортку разом з клапанами для з'єднання вирізують з картону і перегинають по лініях, які відділяють одну від одної грані і клапани від граней.

3. З одержаної розгортки склеюють многогранник, ребра якого зовні окантовують смужками кольорового паперу, а грані обклеюють.

Через непрозорість картону не можна використовувати картонні моделі многогранника для демонстрування його перерізу і тіл, які вписані одне в одне. Тому в більшості випадків за допомогою картонної моделі можна показати лише форму многогранника або іншого тіла.

Крім моделей з стереометрії, виготовлених з цупкого паперу, картону та інших матеріалів, можна зробити велику кількість різноманітних динамічних рухомих моделей з курсу математики для V—IX класів. Основною частиною таких моделей є панель, вирізана з цупкого картону. Панель окантовується папером темного кольору, а лицьова сторона її обклеюється білим папером. На готовій панелі здійснюється монтаж моделі для ілюстрації того чи іншого математичного твердження.

Наведемо примірний перелік динамічних моделей, які можна виготовити з курсу геометрії для VII—IX класів:

1. Для ілюстрації суміжних кутів.
2. До теорем, які виражають ознаки рівності трикутників.
3. Для ілюстрації властивостей рівнобедреного трикутника.
4. До теореми про суму кутів трикутника.
5. Для ілюстрації властивостей зовнішнього кута трикутника.
6. Для ілюстрації вписаних в коло кутів.
7. «Чотирикутники».
8. Для ілюстрації властивостей паралелограма.
9. «Середня лінія трапеції».
10. Для ілюстрації взаємного розміщення прямої і кола.
11. Для ілюстрації перетворення фігур.
12. Для ілюстрації площі паралелограма, трикутника, трапеції і ін.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Абрамова В. А.* Методы работы с книгой при обучении математике // Математика в школе. 1981. № 3.
2. *Антоновский М. Я.* и др. Комплексы учебного оборудования по математике / Под ред. В. Г. Болтянского. М.: Педагогика, 1971.
3. *Белый Б. Н., Бернштейн А. М.* Организация, оборудование и работа математического кабинета в школе. М.: Учпедгиз, 1960.
4. *Болтянский В. Г.* и др. Кабинет математики / Под ред. В.Г. Болтянского. М.: Педагогика, 1972.
5. *Болтянский В. Г.* и др. Оборудование кабинета математики / В. Г. Болтянский, М. Б. Волович, Э. Ю. Красс, Г. Г. Левитас. М.: Просвещение, 1981.

6. *Болтянский В. Г., Левитас Г. Г.* Диафильмы и диапозитивы на уроках математики // Математика в школе. 1971. № 3.
7. *Болтянский В. Г.* Применение кодоскопа на уроках математики // Математика в школе. 1971. № 6.
8. *Болтянский В. Г., Волович М. Б., Левитас Г. Г.* Кабинет математики и проблема учебного оборудования // Математика в школе. 1977. № 4.
9. *Гусев В. А.* и др. Сборник задач по геометрии для 6—8 классов / В. А. Гусев, Г. Г. Маслов, З. А. Скопец, Р. С. Черкасов. М.: Просвещение, 1979.
10. *Гусев В. А.* и др. Дидактические материалы по геометрии для 10 класса / В. А. Гусев, Г. Г. Маслова, З. А. Скопец, М. И. Ягодовский. 2-е изд. М.: Просвещение, 1979.
11. *Дорф П. Я.* Наглядные пособия по математике и методика их применения в средней школе. М.: Учпедгиз, 1960.
12. *Дрига И. И.* Кабинетная система в общеобразовательной школе. М.: Просвещение, 1981.
13. *Дудницын В. П., Сытина Т. Л.* Использование наглядных пособий и технических средств на уроках геометрии в 9 классе // Из опыта преподавания математики в школе / Сост. А. Д. Семушин, С. Б. Суворова. М.: Просвещение, 1978.
14. *Ивлев Б. М.* и др. Дидактические материалы по алгебре и началам анализа для 10 класса / Б. М. Ивлев, С. В. Кудрявцев, З. И. Моисеева, С. М. Саакян, С. И. Шварцбурд. 2-е изд. М.: Просвещение, 1979.
15. *Ивлев Б. М.* и др. Сборник задач по алгебре и началам анализа для 9—10 классов / Б. М. Ивлев, А. Н. Земляков, Ф. В. Томашевич, Ю. В. Калиниченко. М.: Просвещение, 1978.
16. *Кабанов Г. И.* Мой опыт изготовления и применения пособий по геометрии. М.: Учпедгиз, 1958.
17. *Камаев П. М., Левитас Г. Г.* Учебное оборудование для 9 и 10 классов // Математика в школе. 1982. № 3.
18. *Карнацевич Л. С.* Кабинет математики в школе. К.: Рад. шк. 1978.
19. *Концевая Л. А.* Учебник в руках школьника. М.: Знание, 1975. Сер. «Педагогика и психология». № 3.
20. *Лиман М. М.* Конструирование учащимися наглядных пособий по геометрии. М.: Просвещение, 1965.
21. *Мантуров О. В.* и др. Математика в понятиях, определениях и терминах. М.: Просвещение, 1978.
22. *Нешков К. И.* и др. О школьном учебнике математики / К. И. Нешков, Л. В. Кузнецов, Ю. Н. Макарычев, Н. Т. Миндюк, С. Б. Суворова // Математика в школе. 1982.
23. *Нешков К. И., Чесноков А. С.* Дидактические материалы по математике для 4 классов. 3-е изд. М.: Просвещение, 1981.
24. *Об учебных* кабинетах общеобразовательной школы: Метод. рекомендации. М., 1974.
25. *Пакулова Е. И.* Кодоскоп на уроках математики // Математика в школе. 1974. № 5.
26. *Пекаревич Э.* Кабинет математики // Математика в школе. 1973. № 3.
27. *Придатко М. О.* Виготовлення стереометричних моделей: Метод. посібник / За ред. Г. Ф. Олійника. К.: Рад. шк., 1986.
28. *Репьев В. В.* Общая методика преподавания математики. М.: Учпедгиз, 1958.
29. *Наглядные* пособия по математике: Сборник / Сост. А. М. Пышкало, Е. Г. Гаврилов. М.: Просвещение, 1962.
30. *Тарасюк В. Є., Придатко М. О.* Саморобні прилади з математики. К.: Рад. шк., 1962.
31. *Учебно-наглядные* пособия по математике: Сборник / Сост. А. М. Пышкало. М.: Просвещение, 1965.
32. *Учебно-наглядные* пособия по математике: Сборник / Сост. А. М. Пышкало. М.: Просвещение, 1968. Вып. 3.
33. *Учебно-наглядные* пособия по математике / Под ред. А. М. Пышкало. М., 1972. Вып. IV.

34. *Средства* обучения математике: Сборник / Сост. А. М. Пышкало. М.: Просвещение, 1980.
35. *Технические* средства обучения в средней школе: Сборник / Под ред. Л. П. Прессмана. М.: Педагогика, 1972.
36. *Новые* наглядные пособия по математике: Сборник / Под ред. И. Н. Шевченко. М., 1962. Вып. I.
37. *Семаков В. С.* Применение учебно-наглядных пособий и технических средств обучения на уроках математики. М.: Высш. шк. 1972.
38. *Сенников Г. П.* Наглядные средства для изучения геометрии в 6 классе // Математика в школе. 1982. № 5.
39. *Стратилатов П. В.* Об использовании технических средств на уроках геометрии // Математика в школе. 1975. № 1.
40. *Хмельницкий М. С.* Наш математический кабинет // Математика в школе. 1977. № 1.
41. *Шаповаленко С. Г.* Учебник в системе средств обучения // Проблемы школьного учебника. М., 1976. Вып. 4.
42. *Шатрова О. А.* Различные формы работы с книгой, помогающие развивать познавательный интерес // Математика в школе. 1970. № 1.

РОЗДІЛ 8

ПИТАННЯ МЕТОДИКИ ПОГЛИБЛЕНОГО ВИВЧЕННЯ МАТЕМАТИКИ

У даному розділі розглядаються питання вивчення математики в математичних класах і школах, на факультативних заняттях, в позакласній роботі. Ця галузь методики досить широка. Автори не ставили перед собою завдання дати її вичерпний опис. Основна увага приділялась змісту матеріалу, що підлягає вивченню, і методам, які використовуються в процесі поглибленого вивчення математики.

§ 1. ОСОБЛИВОСТІ ВИКЛАДАННЯ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛАХ І КЛАСАХ З ПОГЛИБЛЕНИМ ВИВЧЕННЯМ ЦЬОГО ПРЕДМЕТУ

1. **Нормативний матеріал.** Математичні класи були створені у нашій країні на початку 60-х років, коли з'ясувалась необхідність підготовки великої кількості спеціалістів, які б уміли використати прикладні можливості математики: програмістів, інженерів-конструкторів, фізиків, економістів і ін. Перші підсумки роботи показали, що ці школи успішно виконують завдання розвитку математичних здібностей учнів. Надалі сітка таких шкіл і класів розширювалась.

Тепер серед математичних шкіл і класів (сучасна офіційна їх назва — «школи і класи з поглибленим теоретичним і практичним вивченням математики») можна виділити два типи. До першого відносяться школи і школи-інтернати, організовані при Московському, Ленінградському, Новосибірському, Київському та інших університетах і провідних технічних вузах, таких, наприклад, як МІФІ. Навчання у них проводяться за програмами, які розроблено колективами вчених

і викладачів відповідних вузів. Діяльністю такої школи керує спеціальна рада, до складу якої входять працівники даного вузу. Ця рада має широкі повноваження по розробці і вдосконаленню системи навчання і виховання учнів.

До другого типу відносяться математичні школи і класи, створені в загальноосвітніх школах за рішенням районних (міських) відділів народної освіти. Таких шкіл значно більше. Їх діяльність регламентується «Типовим положенням про школи і класи з поглибленим вивченням окремих предметів», які затверджено Міністерством освіти у 1974 р.

Увесь наступний виклад стосується в основному другого типу шкіл. В теперішній час до них відносяться X і XI класи. Навчання математики в них проводиться за спеціальними програмами [45]. До програми загальноматематичного навчального предмету «Загальний курс математики» повністю входить програма масової школи і, крім того, ряд додаткових питань, які важливі для математичного і загального розвитку учнів. Курс математики в математичних класах розрахований на велику кількість годин у порівнянні з звичайними: за рахунок факультативних занять виділяється 2—4 г на тиждень. Тепер у відповідності з типовим навчальним планом у цих класах вивчаються три предмети загального курсу математики: математичний аналіз, алгебра, геометрія.

Порівнюючи програми масової і математичної школи, можна відмітити, що в курсі геометрії різниці між ними не великі: по суті нового матеріалу програма математичних класів не має. Алгебраїчний матеріал, що вивчається в математичних класах, включає теми, яких немає в програмах масової школи. Серед них комплексні числа, многочлени від однієї і декількох змінних, комбінаторика, теорія імовірностей. Вивчення математичного аналізу передбачає більш глибоке знайомство з теорією границь і наявність теми «Диференційні рівняння», яка не входить до програми масової школи. У цілому курс математики в математичній школі помітно ширший, ніж у масовій.

У математичних школах, які мають можливість використання обчислювальної техніки, крім загального курсу математики, вивчається прикладний навчальний предмет. Як правило, це «Програмування і обчислювальна математика». Трудове навчання в такому випадку полягає в освоєнні теоретичних основ програмування і практики роботи на ЕОМ як операторів і програмістів.

Для математичних шкіл видані і продовжують розроблятися спеціальні навчальні посібники [1; 12; 13].

1.2. Прийом і контингент. До математичних класів, звичайно, вступають учні, які відвідують математичні гуртки, беруть участь у математичних олімпіадах і взагалі проявляють інтерес до математики. Набір до математичних класів починається в квітня. У містах прийом проводиться незалежно від мікрорайону школи, тому інформацію про набір корисно розповсюджувати якомога ширше, зокрема на районних і міських олімпіадах.

Набір проводиться на основі співбесіди. Якщо кількість бажаючих вступити до математичного класу більше норми, то в процесі співбесіди пропонують задачі. Їх складність залежить від конкретних умов,

зокрема від кількості вступників та рівня їх підготовленості. Вона може змінюватися в широкому діапазоні від завдань, які практично не перевищують складності шкільної програми, до важких олімпіадних задач.

При відборі до математичних класів корисно враховувати не тільки рівень математичної підготовки, а й кмітливість, дотепність відповідей, очевидну зацікавленість математикою. Уже під час співбесіди вчитель може скласти уявлення про рівень підготовки своїх майбутніх учнів.

Учні математичних класів, котрі з якихось причин не змогли продовжувати навчання в них, мають право переходити до звичайних класів. При наявності в математичних класах вакантних місць (якщо кількість учнів менше 35 осіб) протягом навчального року до нього може проводитися додатковий набір.

1.3. Система роботи. Система навчальної роботи в математичному класі має ряд особливостей у порівнянні з роботою в звичайних класах. Тут будуть відмічені деякі з них, які мають пряме відношення до навчання математики.

Навчальні матеріали. Для вивчення математики в математичному класі використовується крім спеціальних навчальних посібників різноманітна навчальна література: підручники для масової школи, експериментальні навчальні посібники, різні збірники задач, книги, в яких ідеться про досвід роботи в математичних класах та які містять матеріал навчання [31—34; 40; 51]. Московським міським інститутом удосконалення вчителів видані посібники для вчителів, у яких подано тематичне планування, тексти самостійних і контрольних робіт з розв'язаннями і відповідями [17; 18]. Багато корисного матеріалу вміщено в журналах «Математика в школе», «Квант», в книжках серій «Популярные лекции по математике», «Библиотечка «Кванта» і ін.

Досить часто інтенсивність використання цих додаткових матеріалів така, що робота з підручником відходить на задній план. Він використовується як джерело означень, теорем і стандартних прийомів в основному в самостійній роботі учнів та при контролі обсягу пройденого матеріалу.

Інколи навчання проводиться за матеріалами, розробленими вчителем або науковими працівниками і студентами, які працюють у даному класі. Відмітимо систему так званих «листків з завданнями», які формуються і набувають значимості в теперішній час. Кожний листок — це система з декількох задач з однієї теми. Листок складається вчителем, тому можна в широких межах варіювати його зміст, узгоджуючи з досягненням цілей, які виявляються інколи лише в ході навчання. Необхідно передбачити, щоб кожний учень мав на уроці екземпляр листка. Діапазон використання листків широкий — від епізодичного до побудови на їх основі цілих курсів [51, с.6—76].

Наведемо приклад листка (для роботи з курсу «Математичний аналіз» у X класі).

Завдання 1, частина 2. Дійсні числа і границя послідовності.

1. Довести, що число $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} - \frac{\sqrt{6-4\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}-3}$ раціональне.

2. Довести, що число 0,12345678910111213141 5... ірраціональне.

3. Довести, що кожен відрізок числової прямої має як раціональні, так і ірраціональні числа.

4. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)}$.

5. Дослідіть на збіжність послідовності:

$$a_n = \sin n^0;\ b_n = \frac{\cos n^0}{n};\ c_n = \frac{2n-1}{n^2-1};\ d_n = \frac{n}{2n};\ e_n = \frac{\lg n}{n}.$$

6. Якщо послідовність (x_n) має границю A, то: а) послідовність, яку одержано за допомогою перенумерування членів, теж має границю А; б) кожна підпослідовність послідовності (x_n) (що це таке, дайте означення) теж має границю A. Довести.

7. Довести, що послідовність $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ збігається, і знайти її границю з точністю до 0,01.

8. А. Довести, що збіжність послідовностей (a_n) і (b_n), де $a_1 = 1$, $a_{k+1} = 1 + \frac{1}{a_k}$ при $k \geqslant 1$, $b_1 = 1$, $b_{k+1} = \frac{1}{2}\left(b_k + \frac{5}{b_k}\right)$ при $k \geqslant 1$.

Б. Використовуючи факт збіжності даних послідовностей, встановити, що границя першої дорівнює $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$, а другої $\sqrt{5}$.

В. Навести приклад послідовності, яка не збігається з послідовністю (a_n), але має ту саму границю.

Г. Обчислити $\sqrt{5}$ з точністю до 0,01, використовуючи завдання «А».

9. Довести формулу Рамануджана

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\ldots}}}} = 3.$$

Зауваження. Кожного разу, коли треба обчислити значення будь-якого виразу, мають на увазі, що необхідно знаходити границю відповідної послідовності. У даному випадку розглядають послідовність

$$a_1 = \sqrt{1+2},\ a_2 = \sqrt{1+2\sqrt{1+3}},\ a_3 = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4}}}\ldots.$$

Частіше всього в математиці зустрічаються найпростіші нескінченні вирази: нескінченні суми $(a_1 + a_2 + \ldots)$ і нескінченні добутки. Що означає «значення нескінченної суми»? Дайте означення. Що означає «значення нескінченного добутку»? Дайте означення. Нескінченна сума називається рядом.

10. Границя послідовності (a_k) дорівнює 2; всі $a_k \geqslant 0$. Довести, що границя послідовності $\sqrt{a_1}$, $\sqrt{a_2}$, ... дорівнює $\sqrt{2}$.

11. Довести, що коли існує границя послідовності (x_n), то існує і $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$, причому ці границі рівні. Чи правильне і обернене твердження?

12. Задати на прямій систему відрізків одиничної довжини, які попарно не перетинаються, таку, щоб у кожній нескінченній арифметичній прогресії знайшовся б її член, що належить одному з відрізків.

Уточнити формулювання завдання.

13. Знайти нижню грань відношення повної поверхні конуса (прямого кругового) до площі його осьового перерізу.

14. Знайти верхню і нижню грані для послідовностей задачі 5.

Зауваження. Коли треба знайти грані для деяких функцій (послідовність — це функція), то мають на увазі знаходження граней множини її значень.

Методи навчання і контролю. За період існування математичних класів сформувався новий підхід до навчання математики в них. Він характеризується перш за все інтенсивною самостійною роботою учнів і використанням деяких вузівських методів викладання. Сформувались також підходи до диференціації у навчанні і контролю в процесі навчання.

Самостійна робота. Інтенсивна самостійна робота — домінуюча риса в навчанні математики у кожному математичному класі. Форми її різноманітні: проробка певних фрагментів уроку (безпосередньо на уроці або дома) з наступним виконанням вправ, підбір вправ по заданій темі, інколи складання вправ, підготовка до повідомлення на 15—20 хв за додатковою літературою, що вказана вчителем, і т. п.

Завдання вчителя під час керівництва самостійною роботою учнів— допомогти їм в раціональній організації своєї праці, прищепити навичку глибокого обмірковування завдань, коли поєднуються наполегливість просування у вибраному напрямку і гнучкість, яка необхідна для вибору кількох можливих способів виконання завдання.

Однією з перспективних форм організації самостійної роботи є вже відомі листки з завданнями. Листок, про який говорилось в п. 3.1, входив до системи завдань, розроблених для самостійного виконання учнями X класу школи № 57 м. Москви. До цієї системи входили такі завдання: 1) частина I — побудова перерізів, частина 2 — дійсні числа і границі послідовності; 2) частина 1 — границя функції і похідна; частина 2 — задачі з геометрії (знаходження відношень відрізків); 3) застосування похідної; 4) тригонометричні рівняння і нерівності; 5) властивості диференційованих функцій; 6) ірраціональні рівняння і нерівності; 7) векторний метод розв'язування геометричних задач; 8) площі та об'єми.

На думку вчителів, які розробили цю систему завдань (Б. П. Гейдман, П. І. Масарська), до неї увійшли теми, що потребують максимуму самостійної роботи учнів. Більшість задач були запозичені з різних збірників. До речі, учні можуть знайти їх, розібратися в готовому розв'язанні або скористатися вказівками. Не слід вважати це за недолік, оскільки таким чином учні набувають умінь і навичок роботи з математичною літературою.

Завдання виконуються в окремих зошитах і перевіряються студентами, які працюють з даним класом.

Лекційні курси математики. У процесі навчання математики в математичних класах доцільно використовувати лекційну форму викладу навчального матеріалу, доповнену заняттями, побудованими за зразком семінарів. У деяких школах цикли лекцій читають викладачі пединститутів і університетів, а семінарські заняття проводять студенти під керівництвом учителя. Деякі розділи курсу зручніше викладати в лекційній формі. Так стоїть справа, наприклад, з дійсними числами, тому що треба відразу подати всю систему властивостей, які визначають поняття дійсного числа, а на лекції інформація повідомляється в компактному вигляді. Доцільно використовувати лекції і на уроках повторення.

До числа найбільш популярних циклів лекцій відносяться, наприклад, елементи теорії груп і диференціальні рівняння. Слід підкреслити, що учні зможуть добути користь практично з будь-якого лекційного курсу, хоч у практиці одержали найбільше поширення теми, близькі до розроблених для факультативів. У деяких математичних школах читають курс теорії чисел. Як правило, він обмежується вивченням елементарної теорії подільності, але можна практикувати і більш опановані розділи, такі, як розв'язування рівнянь у цілих числах.

У методичній і науково-популярній літературі є чимало книг, які можна використовувати як основи для лекційних курсів. До них можна віднести, наприклад, книги серії «Популярные лекции по математике» і «Библиотека «Кванта»».

Диференціація у навчанні. Як і в кожному класі, учні математичних класів відрізняються за своїми здібностями та інтересами, отже, для успішного навчання необхідно забезпечити кожного учня навантаженням, що відповідало б його індивідуальним можливостям. Це досягається різними способами: диференційованими домашніми завданнями, необов'язковими завданнями, індивідуальними завданнями. Цій же меті відповідає і індивідуальний контроль.

Контроль засвоєння знань. Методика проведення поточного контролю перевірних, самостійних і контрольних робіт має багато спільного з аналогічною роботою у звичайних класах. Особливістю контролю в математичних класах є залучення студентів до перевірки засвоєння навчального матеріалу: три — чотири студенти можуть забезпечити на уроці перевірку знань усіх учнів.

Під час проведення контрольних робіт, коли є можливість, доцільно користуватися офіційними джерелами (наприклад, [17; 18]) та аналогічними їм. У ці матеріали вчитель може вносити зміни чи доповнення з урахуванням конкретних умов; корисно давати 1—2 додаткових завдання підвищеної трудності.

Для контролю засвоєння великих за обсягом розділів навчального матеріалу проводять залік. Основна вимога до нього пов'язана з необхідністю суміщення контролю і навчаючих функцій. На залік можна виносити вибрані теоретичні питання, найбільш характерні для даної теми, задачі з основного курсу та додаткові завдання. Можна пропонувати для всього класу завдання однакової трудності, а можна давати завдання і з урахуванням здібностей учнів.

Як приклад наводимо короткий опис заліку, до якого ввійшло завдання, про яке йшлося в п. 3.1. Кожен учень відповідав на два питання: один — з тексту завдання, другий — з списку додаткових питань, який було дано раніш.

Додаткові питання. 1. Відомо, що при $k > 1$ між k і $2k$ є просте число. Використовуючи цей результат, знайти яку-небудь верхню границю множини чисел виду p_{p+1}/p_n, де p_n — n-е просте число.

2. Довести, що існує раціональне число, записане лише нулями і одиницями у вигляді нескінченного десяткового дробу.

3. Знайти верхню границю множини чисел, які менші одиниці і записані у вигляді нескінченного десяткового дробу за допомогою цифр 0, 1, 2.

4. А. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$.

Б. Довести, що послідовність $(a_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ збігається.

5. Довести, що послідовність (c_n), де $c_1 = 1$, $c_{k+1} = \frac{1}{2}\left(c_k + \frac{2}{c_k}\right)$, збігається. Довести, що її границя дорівнює $\sqrt{2}$.

6. Довести збіжність послідовності (a_n), де $a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, і обчислити її границю з точністю до 0,2.

7. Знайти границю послідовності (a_n), де

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

8. Довести, що послідовність (a_n), де $a_n = \frac{n^2}{n + n^2}$, збігається.

9. Побудувати графік функції:

а) $y = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{nx}{x+n}$; б) $y = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{2n + xn^2}$.

Розподіл питань за рівнем їх складності

Питання	Легкі	Середні	Важкі
У завданні	1, 5, 14	2—6, 8б, 10, 13, 14	5, 7, 8а, в, г, 9, 11, 12
У додаткових питаннях	2	3, 4а, 6, 7, 9а	1, 4б, 5, 8, 9б

Зошити з виконаними завданнями до заліку були здані вчителю. На заліку учням були запропоновані задачі з числа тих, що були правильно розв'язані ними в зошитах.

Такий залік можна проводити письмово, якщо вчитель працює з класом без помічників, і в усній формі, якщо йому допомагають студенти.

На випускному екзамені учні математичних класів, як і в масовій школі, виконують письмову роботу з математики. Екзаменаційні завдання для математичних класів, як правило, складніші аналогічних завдань у звичайних класах. Ускладнення помітно як у відношенні більшої технічної оснащеності, що потрібно для розв'язування, так і гнучкості мислення, яку треба проявити в процесі розв'язування задач, осмислення відповідей.

Для порівняння наводимо один із варіантів випускних екзаменів задачі на обчислення площ фігур. Фігура, запропонована для звичайних класів, була обмежена лініями $y = 5 - x$ і $y = x + 3$, а для математичних — лініями $y = \sin 0{,}5x$ і $y = -x^2 + 3x - 1$, причому тут додатково зазначалось, що абсциси їх точок перетину є цілими числами.

Поруч з матеріалом загальної шкільної програми на екзамен у математичних класах виносяться завдання з матеріалу, який вивчався в них. Наприклад, часто пропонують завдання, пов'язані з комплексними числами.

1.4. Професійна орієнтація учнів. Як дисципліна циклу трудового навчання в математичних класах викладається програмування. Інколи навчання програмуванню організовано безпосередньо в школі з виходом на ЕОМ в організації, які надають машинний час за домовленністю з керівництвом школи. Інколи ж заняття проводиться в умовах навчально-виробничих комбінатів. За результатами цього навчання деяким учням присвоюють кваліфікацію програміста-обчислювача з виданням відповідного посвідчення. Як правило, трудове навчання в математичному класі мало стосується вчителя математики; воно ведеться іншим учителем.

Однак не у всіх математичних класах вивчається програмування. Незалежно від цього курс математики надає вчителю широкі можливості для розкриття прикладних аспектів математичного знання, урахування математичних зв'язків і в решті решт допомагає професійній орієнтації учнів.

Основну роль тут відіграє поняття математичної моделі, тобто тих математичних засобів, які використовуються для розв'язування певної наукової або виробничої задачі. Учні знайомляться з достатнім запасом математичних моделей, головним чином моделей екстремального характеру і диференціальних рівнянь. Матеріал, що знаходиться в розпорядженні учнів, настільки різноманітний, що в учителя з'являється цілком обгрунтована можливість ввести і узагальнююче поняття математичної моделі. У ньому закладено чітко виражений світоглядний аспект — визначення місця математики в процесі пізнання і в процесі практичної діяльності.

Помітну роль у професійній орієнтації учнів виконує і поняття алгоритму. У більшості процедури і навіть поняття шкільного курсу математики мають алгоритмічну або «квазіалгоритмічну» природу. Тому поняття алгоритму найбільш доцільно розглянути в курсі математики, маючи на увазі його прикладні можливості.

1.5. Методичні особливості поглибленого курсу математики. Сумісність поглибленого вивчення математики і загальноосвітнього курсу. З попереднього викладу можна зробити висновок, що курс математики в математичних класах ширший і глибший, ніж у масовій школі. Це може бути орієнтиром для роботи вчителя у математичному класі, однак треба враховувати і ідейну спільність цих курсів. Вона виявляється в тому, що ці курси мають по суті: 1) єдину систему змістовно-методичних ліній, навколо яких концентрується виклад матеріалу (лінія вивчення числових систем, функціональна лінія і т. д.); 2) єдину понятійну основу; 3) подібні прийоми викладу матеріалу навчання; 4) однакові упори на формування уявлень про прикладні можливості математики; 5) тотожню систему міжпредметних зв'язків; 6) єдину установку на формування тих компонентів матеріалістичного світогляду, які можна особливо розвинути на матеріалі математики.

Наявність зазначених рис спільності виражає один з основних принципів дидактики — єдиний підхід до навчання в усіх типах шкіл.

Роль задач. Задачі виконують досить істотну роль при вивченні математики, яка помітно підвищується при її поглибленому вивченні. Тут можна виділити декілька специфічних особливостей. Найбільш помітною є використання задач під час вивчення нового матеріалу, що досить часто вводиться у вигляді серії задач, за допомогою яких організовується його відпрацювання. Вище вже йшла мова про те, що у вигляді циклів задач можна побудувати навіть цілі курси або їх значні частини.

Наведемо приклад іншого типу. Поняття послідовності не настільки істотне, щоб виділяти його в нормативному матеріалі, але досить корисне для засвоєння поняття границі послідовності, через це йому можна присвятити кілька задач, у одній з яких воно й буде означено. Більш того, можна лише описати це поняття, а як завдання запропонувати привести строге означення (див. впр. 7 у п. 3.1).

У процесі поглибленого вивчення математики велика кількість задач спрямована на встановлення взаємозв'язку різних вивчених розділів математики. Метою при цьому стає виховання в учнів сміливості і наполегливості в пошуку способів розв'язування задачі не тільки в найближчому оточенні умови, а й у більш широкій, інколи навіть непередбаченій галузі.

Приклад. Розв'язати рівняння $\sqrt{x+5} = x^2 - 5$. Стандартний спосіб звільнення від ірраціональності приводить до ускладнених викладок. Звернемося до креслення. Розглянемо систему

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x+5}; \\ y &= x^2 - 5 \end{aligned}$$

(рис. 84), а потім її наслідок $\begin{cases} y^2 = x + 5 \\ y = x^2 - 5 \end{cases}$ (рис. 85). Помітивши, що рівняння другої системи задають взаємно обернені відповідності, і враховуючи, що графіки взаємно обернених відповідностей симетричні відносно прямої $y = x$, неважко знайти два розв'язки цієї

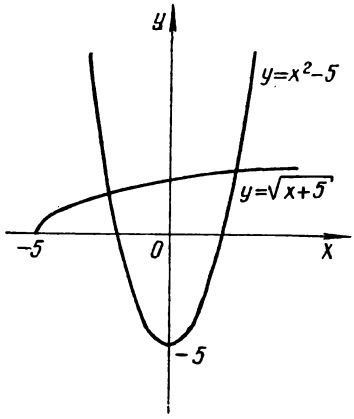


Рис. 84

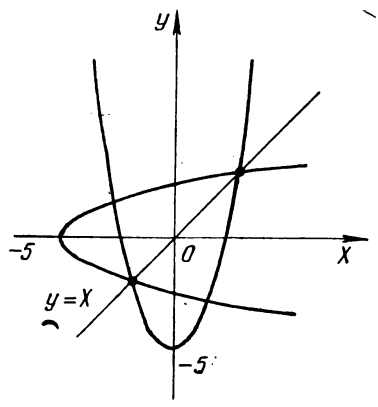


Рис. 85

системи, які лежать на прямій $y = x$. Це значно спрощує розв'язування вихідного рівняння.

Наведений приклад стосується задач, які можна було б назвати нестандартними. Необхідно відмітити, що при поглибленому вивченні математики роль стандартних задач, основна мета яких — відпрацювання навичок використання нормативного матеріалу, теж досить значна, через те що задачі, подібні наведеній, можуть базуватися тільки на достатньо високому рівні оволодіння технікою алгебраїчних перетворень. Інакше учні не зможуть оцінити метод розв'язування і застосувати його в подібній ситуації.

Нарешті, відмітимо, що при використанні задач як мотивування введення нового математичного поняття або методу особливо корисні змістовні задачі. Одним з важливих етапів їх розв'язання є складання відповідних математичних моделей, які служать потім предметом вивчення.

Виділення найважливіших математичних понять, ідей, фактів і методів. Під час вивчення кожної з математичних дисциплін школярі знайомляться з великою кількістю нової для них інформації. Численність матеріалу, який розглядається, не повинен приховувати від них наявності в кожному курсі провідних ідей, методів, прийомів, які є найважливішими для засвоєння. Для виділення і спеціального спрямованого вивчення найбільш важливого матеріалу використовується весь комплекс методичних засобів, які знаходяться в розпорядженні вчителя. До нагадування учням про роль і значення такого матеріалу слід неодноразово повертатися.

Найзручнішою формою викладу ключових ідей є лекція. Після аналізу однієї або кількох вступних задач і виявлення їх структури, що нас цікавить, доцільно викласти доступний учням фрагмент теорії, потім розглянути різноманітні застосування як до задач, так і до організації теоретичного матеріалу. Цей підхід доречний, наприклад, при викладі основних властивостей об'єму та обчислення об'єму за допомогою інтегрування.

Часто використовується узагальнення даної задачі або методу її розв'язування. Наприклад, в курсі алгебри необхідно сформувати в учнів «функціональне бачення» рівняння, тобто звичку при розв'язуванні рівняння уявити, а коли потрібно, і дослідити його графік. Така звичка, природно, може виникнути лише в ході аналізу декількох прикладів, які були вдало розв'язані за допомогою цього прийому.

Для виділення провідних ідей інколи зручно використати завдання, в яких потрібна ідея прихована за зовні «несерйозним» фоном. Наведемо приклад: «Альпініст здійснив сходження на гору за 12 г, почавши його о 8 г. В наступний день о 8 г він почав спуск і витратив на нього теж 12 г. Довести, що в обидва дні він хоч би один раз побував в один і той самий час доби на одній і тій самій висоті».

Зрозуміло, що провідним мотивом розв'язування є розгляд двох функцій, одна з яких виражає залежність висоти знаходження альпініста від часу доби при підійманні, а друга — при спусканні. Істотно, що ці функції неперервні на відрізку [8; 20], так що на цьому відрізку до них має застосування теорема Коші — Больцано, звідки й слідує твердження, що доводиться.

Прикладний аспект навчання математики. При вивченні математики в математичних класах питання застосування математики повинні займати, як і в масовій школі, центральне місце в курсі. Можливості поглибленого курсу математики дають змогу дослідити задачі прикладного змісту, які вимагають для свого розв'язання досить складних математичних засобів.

Прикладний аспект навчання математики можна розглядати в двох планах. По-перше, в зв'язку з розвитком теорії, що розглядається в тісній єдності з відповідним колом застосувань. По-друге, на задачах або циклах задач прикладного змісту, які використовують «неспецифічні» математичні методи.

До першого відноситься, наприклад, поняття про лінійне програмування, яке в математичних класах можна розвинути досить глибоко (див. [51, с. 16—186]), аж до написання програм для ЕОМ, які реалізують один із методів розв'язування основної задачі лінійного програмування. До другого можна віднести відступи (або, навпаки, мотивування) в окремих місцях курсу математики: гармонічні коливання при вивченні тригонометричних функцій, складання і дослідження диференціальних рівнянь (з використанням законів Ньютона, при розгляданні змушених коливань і резонансу і т. д.).

Як приклад наведемо задачу, розібрану в збірнику [12]: «Матеріальна точка маси m рухається по прямій під дією постійної сили F. Опір середовища пропорціональний швидкості руху з коефіцієнтом пропорціональності k. Знайти закон зміни швидкості, якщо початкова швидкість дорівнює нулю».

На основі другого закону Ньютона для розв'язування задачі складається диференціальне рівняння $mv' = F - kv$. Відповідь, одержана при розв'язуванні диференціального рівняння, підлягає подальшому дослідженню — знаходиться границя швидкості на нескінченності: вона прямує до самого значення F/k. Однак цим розв'язання не обме-

жується; ставиться питання, якому реальному процесові відповідають умова і якісний результат задачі, і дається одна з можливих відповідей — вільне падіння парашутиста.

Для процесу наведене диференціальне рівняння є його математичною моделлю. У зв'язку з встановленням такої відповідності учитель повинен звернути увагу учнів на декілька типових моментів, істотних для правильної оцінки одержаного розв'язку як функції, що описує процес вільного падіння: якісний збіг поведінки функції і поведінки процесу (відомо, що швидкість парашутиста поступово стабілізується), можливість дослідної перевірки припущення про вплив середовища на рух і ін.

На цьому прикладі легко помітити, яке значення має поняття математичної моделі в аспекті застосувань математики. Через свою складність це поняття, очевидно, не може бути предметом вивчення в школі. Але досить важливо, щоб воно було проілюстровано на розгорнутому прикладі. Цій меті може служити, наприклад, курс диференціальних рівнянь, орієнтований на яке-небудь одно коло застосувань, і розвиток теорії у напрямі якісного аналізу процесів (задачі біологічного характеру; задачі, що спираються на закони Ньютона, і т. п.) [57].

Строгість при вивченні математики. Поглиблений курс математики, як і звичайний, не може бути побудований з «максимальною» строгістю викладу матеріалу. Разом з тим слід домагатися усвідомленого відношення учнів математичних класів до виконання доведень і в більш широкому плані ясності розуміння ними структури математичної теорії, ролі доведень у ній. Це можна здійснити різними способами, причому найбільш доцільно використати їх спільно.

А. При вивченні кожної досить широкої теми необхідно декілька тверджень подавати з можливо більш розгорнутими, повними доведеннями, наприклад в темі «Границі послідовності» — збіжність послідовності, що визначає число e, в темі «Первісна і інтеграл» — теорему про множину первісних функцій, неперервній на проміжку.

Сказане відноситься переважно до курсу математичного аналізу. В курсі алгебри доведення, як правило, «самі собою» виходять досить строгими, якщо тільки основні властивості арифметичних операцій явно сформулювати як аксіоми. Цю обставину необхідно чітко відмітити у викладанні.

Б. Знайомство з аксіоматичним методом входить до програмних вимог, які стосуються вивчення математики. Традиційно це знайомство зв'язано з курсом геометрії. При вивченні перших розділів стереометрії (властивості прямих, площин, паралельність і перпендикулярність у просторі) проводиться не просто строге доведення окремих теорем, а на аксіоматичній основі будується значна частина курсу стереометрії. Важливо, щоб при вивченні цього матеріалу був засвоєний і принцип такої побудови теорії. Цьому доцільно присвятити цілий урок, на якому вчитель може синтезувати спосіб організації матеріалу.

Тут же, як ми вважаємо, слід повідомити, що подібний, цілком строгий спосіб викладу теорії далеко не завжди зручний для вивчення.

Надалі вчитель повинен систематично відмічати неповноту міркувань у тих випадках, коли це здається методично доцільним. Зокрема, дуже корисно ставити контрприклади, які показують значення тієї чи іншої посилки. Наприклад, у доведенні теореми про множину первісних неперервної функції, заданої на проміжку, досить непомітний має вигляд умова, що область означення функції — саме проміжок, а не більш складна множина. Бажано запитати учнів, де саме в доведенні було використано це твердження, а потім навести приклад, який показує, що без нього твердження перестає бути правильним.

Найпростішим таким прикладом є функція $y = \frac{1}{x}$ на звичайній області означення. Можна перевірити, що множина її первісних складається з функцій виду

$$y = \begin{cases} \ln x + C_1, & \text{якщо } x > 0; \\ \ln(-x) + C_2, & \text{якщо } x < 0, \end{cases}$$

де C_1, C_2 — довільні константи. Таким чином, ця множина залежить не від одного, а від двох параметрів.

Вдалий набір контрприкладів до різних властивостей функцій, що вивчаються в курсі математичного аналізу, є в роботі [48].

В. Виключно велике значення у формуванні правильного уявлення про математичну строгість має співставлення строгих доведень з міркуваннями, які використовують наочність або фізичну інтерпретацію математичних понять.

Наприклад, в математичному класі теорему Лагранжа корисно виводити в стандартній послідовності: теорема Больцано — Веєрштраса — теорема Роля — теорема Коші — теорема Лагранжа (це повчальний цикл задач, його слід задати для розв'язування в класі і розібрати). Однак пізнавальна цінність доведення буде невелика, якщо не інтерпретувати теорему Лагранжа фізично (з використанням миттьової швидкості) і геометрично (з використанням поняття дотичної).

Точно так же при вивченні алгебри нерівність Коші — Буняковського цілком необхідно співставити з відповідною властивістю скалярного добутку.

Г. Наведений приклад аксіоматичної побудови початків стереометрії (Б) не єдиний, який можна використати в математичному класі. Набутий деякий досвід аксіоматичного викладу перших властивостей дійсних чисел (див. [51, с 15—19]). Треба відмітити, що при читанні курсів лекцій у багатьох випадках дозволяється перші властивості теорії, що вивчаються, вивести строго з аксіом. Це відноситься, зокрема, до таких тем, як теорія груп або поняття метричного простору.

Д. Слід сказати також кілька слів про вимоги, які необхідно пред'являти до розв'язування учнями вправ і задач. Записи повинні бути логічними, чіткими, як і мова. Не треба допускати зловживання символікою. Треба формувати в учнів почуття форми і міри. Тут в значній мірі можуть виявлятися виховні функції математики.

Внутріпредметні зв'язки дисциплін математичного циклу. Загальною рисою вивчення математики в масовій і математичній школі є тіс-

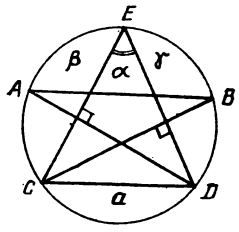


Рис. 86

ний взаємозв'язок провідних ліній курсу математики. Як конкретні приклади можна навести взаємозв'язки, які в значній мірі визначають стиль вивчення таких тем: графіки функцій — геометричні перетворення, нерівності — геометричний смисл нерівностей, площа — інтеграл.

У математичних класах до розв'язків такого роду додається незначна кількість нових. Прикладами можуть бути зв'язки диференціальних рівнянь з геометрією (через поняття дотичної), комплексних чисел — з тригонометрією і розв'язуванням рівнянь, комбінаторики з теорією імовірностей.

Можна відмітити, що при поглибленому вивченні математики внутріпредметні зв'язки орієнтовані на формування прийомів розв'язування задач. Розглянемо кілька прикладів.

Задача 1. Усі зображені на кресленні (рис. 86) відрізки є хордами кола S. $AB = \frac{6}{5}a$, $CD = a$. Знайти величину кута α, якщо $EC \perp AD$, $ED \perp BC$.

Розв'язання. Позначимо дуги AE і BE відповідно β і γ. Тоді будемо мати: $2\alpha + \beta = \pi$, $2\alpha + \gamma = \pi$, звідки $\beta + \gamma = 2\pi - 4\alpha$. За теоремою синусів одержуємо рівності

$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R, \quad \frac{\frac{6}{5}a}{\sin\frac{2\pi - 4\alpha}{2}} = 2R.$$

Звідси легко перейти до тригонометричного рівняння відносно α і знайти шукане значення кута $\left(\alpha = \arccos\frac{3}{5}\right)$.

Очевидно, що складання рівняння — провідна ідея в розв'язуванні задачі, яка має геометричний зміст. Однак прийти до такої думки, здається, не так просто.

Задача 2. Довести, що коли $C_0 + \frac{C_1}{2} + \cdots + \frac{C_2}{k+1} = 0$, то рівняння $C_0 + C_1x + \cdots + C_kx^k = 0$ має корінь на інтервалі (0; 1).

Розв'язання. Розглянемо ліву частину рівняння як функцію від x: $f(x) = C_0 + C_1x + \ldots + C_kx^k$. Ця функція неперервна. Інтегруючи її в межах від 0 до 1 і використовуючи умову, одержимо

$$\int_0^1 f(x)\,dx = C_0 + \frac{C_1}{2} + \cdots + \frac{C_k}{k+1} = 0.$$

Звідси випливає, що на інтервалі (0; 1) функція $f(x)$ не може зберігати знак, тому вона повинна мати на ньому корінь.

На цьому прикладі ми зіткнулися з характерною особливістю методики використання задач при поглибленому вивченні математики —

залучення до розв'язання засобів, досить віддалених від тієї галузі, в якій сформульована вихідна задача.

Задача 3. Довести рівносильність рівнянь $\sqrt{2^x} = x$ і $\sqrt{2^{\sqrt{2^x}}} = x$.

Розв'язання. Перш за все зрозуміло, що числа 2 і 4 — корені даних рівнянь. Розглянемо функції, що стоять у лівих частинах рівнянь. Легко перевірити, що обидві вони опуклі (рис. 87). Але графік опуклої функції перетинає кожну пряму, зокрема і ту, що нас цікавить — пряму $y = x$, не більше ніж у двох точках (якщо тільки він не містить ніякого відрізка, чого в даному випадку немає). Значить, множини даних рівнянь збігаються з $\{2; 4\}$, тобто рівняння рівносильні.

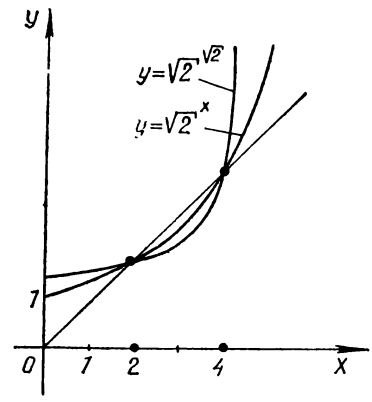


Рис. 87

Тут для дослідження алгебраїчного питання доводиться залучати «тонку» аналітичну властивість функції — опуклість.

Задача 4. Назвати більше з чисел $\log_7 8$ і $\log_8 9$.

Розв'язання. Представимо ці числа як значення функції $y = \log_x (x + 1)$. Очевидно, що $\log_7 8 = y$ (7), $\log_8 9 = y$ (8). Дослідження введеної функції за допомогою похідної (до речі, досить повчальне) показує, що вона спадає. Значить, перше з даних чисел більше.

Цей приклад ілюструє можливість застосування дослідження властивостей функції до вивчення числової системи.

Наведені приклади можуть бути орієнтовані на безпосереднє встановлення зв'язків конкретних тем, що характерно для початкових етапів формування уявлень про ці зв'язки. Наступні етапи вимагають дещо інших типів навчальних завдань, перш за все порівняння різних методів розв'язування однієї і тієї ж задачі, спрямованого пошуку декількох розв'язків і порівняння їх між собою.

Приклад. Довести, що сума всіх векторів з початком у центрі правильного n-кутника і кінцями в його вершинах дорівнює нулю.

Розв'язання I. Повернемо даний многокутник на $\frac{2\pi}{n}$ радіан навколо його центра. Сума векторів, що розглядаються, з одного боку, не зміниться (тому що при такому повороті правильний многокутник суміститься сам з собою), з другого — перетвориться у вектор тієї ж довжини, що й вихідний, але повернутий відносно нього на ті самі $\frac{2\pi}{n}$ радіан. Отже, сума дорівнює нулю.

Розв'язання II. Воно полягає в доведенні того, що вектори, які розглядаються, можна перемістити і скласти з них контур нового правильного n-кутника. Сума векторів при цьому буде дорівнювати нулю, тому що вздовж них здійснюється обхід контура.

Розв'язання III. При відповідному виборі системи координат дані вектори будуть зображувати корені n-го степеня з одиниці

відносно геометричного зображення поля комплексних чисел. Їх сума буде дорівнювати нулю як сума коренів рівняння $x^n - 1 = 0$ за теоремою Вієта.

Неважко зрозуміти, що зіставлення двох розв'язань спричиняє організацію навколо даної задачі широкого матеріалу, пов'язаного з переміщеннями. Порівняння першого і другого розв'язань з третім виявляє несподівані зв'язки комплексних чисел з геометрією. Теорема Вієта одержує на цьому прикладі ще одне, геометричне застосування.

Усі наведені приклади досить складні. Не варто думати, що зв'язки різних тем і курсів треба виявляти лише на таких прикладах. За їх допомогою вони можуть лише закріпитися, перетворитись в один з корисних методів аналізу і розв'язування задач. У процесі формування зв'язків треба розглядати і прості вправи. При цьому основа розгляду зв'язків може полягати у встановленні того, які з розв'язань у тому чи іншому відношенні простіші.

Приклад. Знайти найбільше значення функції $y = \frac{x}{2} + \cos^2 x$ на відрізку $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Розв'язання I. Обидва доданки в аналітичному виразі даної функції зростають на області означення, отже, і їх сума зростає і приймає найбільше значення в точці $x = \pi$.

Розв'язання II. Стандартне використання процедури пошуку найбільшого значення функції за допомогою похідної.

Зрозуміло, що перше розв'язання раціональніше, але чи означає це, що воно простіше? Воно засновано на спостереженні, яке відразу можна й не помітити. Коли ж для розв'язання відведено обмежений час, то немає підстав шукати такого роду дотепний підхід, якщо заздалегідь відомий метод, що приводить до успіху.

Порівняння різних розв'язань задачі особливо корисне при заключному повторенні і підготовці до екзамену. Звичайно, воно проводиться при аналізі варіантів вступних екзаменів з математики до вузів.

Відображення історії і методології математики. Математика має багату історію і продовжує інтенсивно розвиватися. В процесі вивчення математики це слід в достатній мірі враховувати. Розгляд окремих питань історії, вказівка на принципові компоненти структури і застосувань понять, що вивчаються, помітно пожвавлюють уроки і виконують важливі виховні функції, формуючи світогляд учнів.

Ми говоримо тільки про окремі питання не випадково. Очевидно, організація більш чи менш широкої системи вивчення історико-методологічного матеріалу не дає позитивного ефекту. Для неї курс математики в математичних класах недостатньо глибокий, в ньому, зрозуміло, приділяється більше уваги вивченню конкретних понять, методів, прийомів, ніж їх історико-методологічному осмисленню.

Найбільш доцільно в цьому зв'язку висвітлювати ті питання, які природно напрошуються при вивченні матеріалу. Подібних місць в процесі багато. Ініціатива у виділенні тих із них, з якими можна

зв'язати історико-методологічні відступи, цілком і повністю належить учителю. Однак повз деяких питань не можна пройти ні при яких умовах. До їх числа належать, наприклад, походження аксіоматичного методу та його роль в математиці, зв'язок між математикою і природознавством, походження основних математичних понять (функція, алгебраїчна операція, окремі числові системи, деякі класи функцій, границя, неперервність, диференціювання, інтегрування і т. д.).

Джерела, з яких учитель може запозичити подібний матеріал, численні і різноманітні: статті в журналах «Математика в школе» і «Квант», присвячені історії математики і загальним питанням, курсу історії математики, нарешті, книги з популярної математики, класичним взірцем яких є «Що таке математика» Р. Куранта і Г. Роббінса, видані на сьогодні 5 томів «Энциклопедии элементарной математики» та багато інших.

Специфіка системи навчальних завдань. Система навчальних завдань при поглибленому вивченні математики була вже охарактеризована вище (див. п. 1.3). Необхідно відмітити, що особливу роль виконують завдання для розвитку творчих здібностей школярів. Робота в цьому напрямку зв'язана з подоланням значних труднощів, оскільки загальна математична культура учнів все-таки недостатня. Треба всіляко заохочувати прагнення учнів до творчості, яке виникає внаслідок наполегливого вивчення тих питань, які викликали в них підвищений інтерес.

Найбільші труднощі пов'язані з відбором завдань, які були б одночасно посильні учням і вимагали б від них по-справжньому творчого підходу до виконання, тобто були б у якомусь відношенні новими. Нерідко учні самі задають питання, на які вчитель відразу може й не відповісти, але вони містять у собі можливості пошуку. В таких випадках доречно заохочувати учнів до самостійного дослідження. Однією з стандартних ситуацій, в яких виникають подібні питання, є розгляд властивостей і ознак в їх взаємозв'язку. Часто властивість доводиться нескладними міркуваннями, а ознака може виявитися важкою в доведенні. Наприклад, відома така властивість дуги кола: якщо перетнути її парою паралельних прямих, то дуги, що містяться між цими прямими, будуть рівні (рис. 88). У зв'язку з цим твердженням виникає таке питання: Нехай Г — обмежена випукла лінія, у кожній точці якої існує дотична. Нехай виконується властивість: «Частини кривої

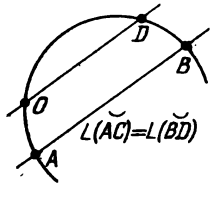


Рис. 88

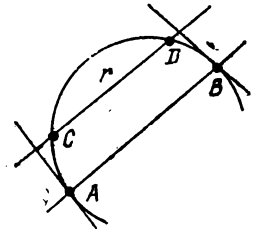


Рис. 89

Г, що містяться між будь-якою парою паралельних прямих, рівні за довжиною». Чи правильно, що Г-дуга кола?

Це дуже важка задача. До неї можуть прийти і самостійно, і під керівництвом учителя. Пошук розв'язку передбачає міцне опановування поняттям похідної і її геометричним смислом. Наведемо ескіз розв'язання. Зазначимо, що дуга кола має таку характеристичну властивість: «Кути, утворені хордою і дотичними до дуги в точках, які є кінцями хорди, рівні» (рис. 89). Можна показати, що в умовах задачі ця властивість виконується. Дійсно, нехай AB — хорда, Г, r — пряма, паралельна прямій AB. Розглянемо дотичні до Г в точках A і B. Вони нахилені до прямої AB під одним і тим же кутом, тому що довжини відрізків дотичних і відповідних дуг AC і BD — еквівалентні нескінченно малі при $\rho(AB, r)$, які прямують до нуля.

Цінним джерелом творчих завдань можуть служити задачі, які систематично публікуються в журналі «Квант». Багато корисного вчитель може взяти з розділу задач журналу «Математика в школе». Але слід підкреслити, що для розвитку творчих здібностей учнів, прищеплення сміливості у використанні матеріалу найбільш цінні, мабуть, задачі, які виникають природньо в процесі вивчення математики в класі або під час самостійних занять.

Може скластися враження, що першорядне значення слід надавати тільки тим формам роботи, які розвивають математичні здібності учнів і поглиблюють володіння матеріалом. У дійсності це не так. Акцентування зазначених форм роботи може навіть негативно відбитися на успішності навчання в математичному класі. Не меншого значення слід надавати прищепленню учням міцних навичок виконання перетворень алгебраїчних виразів, охайного запису розв'язань рівнянь і різних задач, наприклад стереометричних задач на обчислення. Необхідна робота і по формуванню навичок обчислень з досить громіздкими числовими даними.

З досвіду роботи в математичних класах відомо, що значну частину помилок учні допускають через неуважність під час виконання обчислювальної частини завдання: наприклад, навіть сильний учень може неправильно обчислити значення інтегралу або неправильно записати множину розв'язків найпростішого тригонометричного рівняння. Тому важливо пояснити учням, що тільки міцне опанування обчислювальними процедурами може забезпечити дальше просування в математиці. Необхідно вказувати і на відповідні вимоги, які ставляться на вступних екзаменах до вищих навчальних закладів.

Розглянуті у цьому нарисі питання навчання математики в математичних класах — невелика частина проблем, з якими вчитель зустрінеться, приступаючи до роботи в такому класі. На закінчення ми хочемо застерегти вчителя-початківця від розповсюдженої педагогічної помилки, яка може істотно ускладнити його роботу. Перші уроки в щойно набраному класі приводять до уявлення про значно вищий рівень математичного розвитку учнів, ніж це з'ясується пізніше. Під впливом цього враження учитель ризикує взяти надто високий темп вивчення матеріалу або поставити перед учнями занадто високі вимоги. Треба сказати, що учні і самі інколи дають привід до такої думки —

багатьом підліткам властиво перебільшувати свої можливості. В цих умовах учитель не повинен іти на поводі в учнів. Слід довести їм необхідність досить повільного (з їх точки зору) просування — переконати на прикладах тих помилок, які допускаються ними в роботах. Для тих же учнів, які показують дійсно добрі знання предмету, доцільно розробити індивідуальні завдання, не знижуючи разом з тим вимогливості до них у виконанні всього комплексу навчальної роботи.

§ 2. ФАКУЛЬТАТИВНІ ЗАНЯТТЯ З МАТЕМАТИКИ

Факультативні заняття — форма навчальної роботи, призначення якої полягає в розвитку здібностей і інтересів учнів у поєднанні з загальноосвітньою підготовкою з обраного предмету і на її основі. Положення факультативів у ряді форм поглибленого вивчення окремих навчальних предметів описується так: «Факультативи продовжують залишатися одним із основних засобів деференціації навчання в умовах загальної середньої обов'язкової освіти, допомагають розв'язувати завдання удосконалення змісту і методів навчання, морального виховання учнів, їх підготовки до життя, до праці, в тому числі і в сфері матеріального виробництва» [43].

2.1. Цілі організації факультативних занять з математики. В основному вони ті ж, що й цілі організації математичних класів. Це розширення кругозору учнів, розвиток математичного мислення, формування активного пізнавального інтересу до предмету, виховання світогляду і ряд особистих рис засобами поглибленого вивчення математики. Факультативні заняття сприяють професійній орієнтації учнів у галузі математики та її застосувань, полегшуючи тим самим вибір спеціальності і подальше удосконалення в ній.

Різниця в діяльності факультативних груп і математичних класів зв'язана з тим, що перші не вимагають перебудови системи навчання математики. Вони працюють на базі загального курсу математики. Організація факультативних занять значно простіша, ніж математичного класу. Тому факультативні заняття — більш масова форма підвищеної математичної підготовки школярів.

Факультативні заняття мають велике значення в удосконаленні шкільної, в тому числі математичної, освіти. Вони дозволяють проводити пошук і експериментальну перевірку нового змісту, методів навчання, в широких межах варіювати обсяг і складність навчального матеріалу. Ця риса факультативу дозволяє вчителю проявити творчий підхід до роботи.

2.2. Організація факультативних занять з математики. В теперішніх умовах передбачені факультативні заняття, починаючи з VIII класу. Факультативні групи в кількості 15—20 і більше осіб створюються з учнів паралельних класів. Допустимо також створення об'єднаних груп із учнів послідовних класів (VIII—IX або X—XI);

можуть бути організовані і міжшкільні групи. Для успішного проведення факультативу необхідно, якщо тільки дозволяють конкретні умови, ввести їх до шкільного розкладу, не допускати зриву і переносу занять.

Проведення факультативів вимагає високого рівня професійної підготовки вчителя. В ряді випадків для керівництва факультативними групами запрошують викладачів вищих (особливо педагогічних) або середніх спеціальних навчальних закладів.

Вибір факультативу проводиться школярами вільно, у відповідності зі своїми інтересами. Вимоги до учня, який бере участь у роботі факультативу, такі самі, як і у відношенні до кожного навчального предмету: обов'язкове відвідування занять, виконання домашніх завдань та інших доручень, зібраність, дисциплінованість у навчанні і т. д.

Навчання на факультативах здійснюється за програмами, що рекомендуються Міністерством освіти. На сьогодні розроблені посібники з багатьох тем факультативних занять (див. [55—57]).

2.3. Особливості факультативних занять з математики. Факультативний курс математики в цілому або ж для одного року навчання являє собою систему декількох тем, відносно недостатньо пов'язаних між собою. Кожна з них розвиває деякі з основних для шкільної математики ідей, понять, методів. Звідси випливає, що факультативні заняття необхідно зіставляти з основним курсом математики. Для досягнення такого зв'язку використовуються різні методичні прийоми: систематизація, коли відповідна тема факультативу вивчається після того, як в основному курсі накопичений широкий матеріал, що її стосується; послідовне розгортання теорії, коли в основному курсі є початковий етап її побудови, не доведений до узагальнюючих результатів; розгорнутий опис застосувань певного методу, якщо в основному курсі про них тільки згадується, і багато інших.

Основний курс математики служить, таким чином, джерелом тем (і конкретних проблем) для поглибленої розробки на факультативі. Взаємозв'язком основного і факультативного курсів доцільно скористатися для розвитку мислення учнів, якщо в зручні моменти звертати їх увагу на характер роботи з навчальним матеріалом. Наприклад, можна не просто проводити систематизацію, а й звертати увагу учнів на систематизацію як таку, проясняючи її цілі, використані математичні засоби і т. д. Вплив факультативного курсу на розвиток мислення (зокрема, математичного) школярів буде ефективнішим, якщо зв'язки між ним і основним курсом стануть двобічними. Досягти цього допоможе виклад на уроках математики результатів, що стосуються проблем, поставлених в основному курсі, але одержаних на факультативі.

Наведемо конкретний приклад. На уроках алгебри під час розгляду рекурентного способу задання послідовностей на прикладі чисел Фібоначчі був запропонований парадокс перетворення прямокутника з площею 65 у квадрат з площею 64 (рис. 90). Парадокс легко розв'язується застосуванням ознак подібності трикутників (лінія AEC, так

само, як і AFC, зображена на кресленні відрізком, у дійсності є ламаною). Однак він має і більш глибокий алгебраїчний смисл, пов'язаний з властивостями чисел Фібоначчі: $U_{k-1}U_{k+1} = -U_k^2 + (-1)^k$ при $k \geqslant 2$. Цю властивість можна розглянути на факультативних заняттях в темі «Послідовності і рівняння» («Математика у застосуваннях», X клас, друга тема); на уроках математики про неї може розповісти хто-небудь із членів факультативної групи.

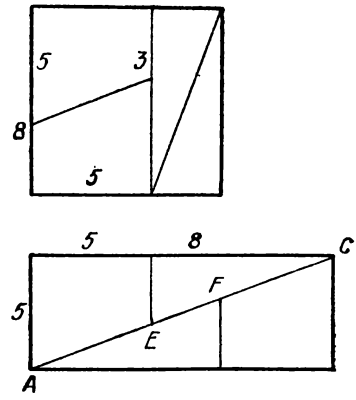


Рис. 90

Ще одна особливість факультативних занять — їх наступність у відношенні до багатьох форм позакласної і позашкільної роботи з математики. Факультативи, як і навчання у математичних класах, доповнюють математичні гуртки не лише новим змістом, новими підходами до його розкриття, але й компонентами, властивими кожному навчальному предмету: зв'язністю викладу, тривалістю циклу вивчення теми і ін. У цьому відношенні на заняттях гуртків (у V — VIII класах) можна провести відповідну підготовку, роботу по формуванню інтересів і нахилів дітей, пояснення можливостей дальшого поглиблення знань і тих якостей особливості, яких вона вимагає. Така підготовка істотно полегшує перехід до систематичного вивчення певних розділів математики на факультативних заняттях.

Нарешті, факультативні заняття надають великі можливості підготовки до математичних олімпіад, виступів у шкільних математичних лекторіях і вечорах. Таким чином, факультативи можуть позитивно впливати на позакласну роботу.

2.4. Зміст факультативних курсів. Його визначено програмою [44], яка передбачає вивчення таких розділів: «Вибрані питання математики» (VIII—XI класи, 1 г на тиждень), «Математика у застосуваннях» (X—XI класи, 1 г на тиждень), «Алгоритми і програмування» (спецкурс у IX, X або XI класі, 35 г). До програми додається список літератури, рекомендований для вивчення кожної теми. У X—XI класах учителю надається право вивчати один з перших двох розділів повністю або скласти комбіновану програму, взявши по одній темі з кожного розділу. Спрямованість вивчення описується в пояснювальній записці до програми так: «...передбачається, що в процесі занять буде показано: історія виникнення ряду математичних методів, концепцій та ідей, їх значення для інших наук і галузей практичної діяльності» [44, с.35.] Зупинимося на деяких питаннях розкриття матеріалу факультативного курсу.

Історичний матеріал на факультативах. Історичному аспекту математики на факультативних заняттях можна приділити більше уваги, ніж в основному (і навіть у поглибленому) курсі, оскільки для них виноситься порівняно небагато питань, але вивчаються вони з достат-

ньою глибиною. Обсяг історичних відомостей, які входять до різних тем факультативних курсів, може змінюватися — від епізодичного згадування про факти і особи до викладу теми в плані її послідовного історичного розвитку. Не всі теми надають у цьому відношенні однакові можливості; але, у всякому разі, не можна недооцінювати як педагогічного (підвищення інтересу до предмету), так і методологічного (зазначення ролі практики в постановці теоретичних задач, роз'ясненя сил, що рухають розвиток наукового знання) впливу історичних відомостей на формування світогляду і розвиток мислення школярів. Наведемо приклади включення історичних відомостей у деякі теми факультативного курсу.

«*Подільність і прості числа*», «*Системи числення і арифметичні обладнання ЕОМ*» (*VIII клас*). У першій з цих тем достатньо окремих згадувань про видатних учених в зв'язку з оповіданням про їх досягнення: решето Ератосфена; прості числа в «Початках» Євкліда; внесок Ферма в теорію чисел; найвидатніші досягнення російських і радянських учених — П. Л. Чебишева, І. М. Виноградова і т. д. Друга тема надає більші можливості. У відношенні систем числення найбільш повчально прослідкувати за процесом пошуку оптимальної системи, показати перевагу позиційного принципу з точки зору простоти алгоритмів обчислень. При вивченні арифметичного обладнання ЕОМ не можна обійти мовчанням історію розвитку засобів обчислювальної техніки — від перших арифмометрів Паскаля і Шіккарда до сучасних обчислювальних комплексів. У цілому історичні відомості тут стосуються викладу принципово важливих питань, хоч основний натиск треба зробити на конкретно-математичний зміст матеріалу.

«*Нескінченні множини*» (*IX клас*). Теоретико-множинна символіка і конструкції утворюють важливу частину мови сучасної математики, тому у виклад цієї теми можно включити різні відомості про походження і розвиток математичних символів. З методологічної точки зору виключний інтерес викликають парадокси теорії множин, деякі з них можна привести на заняттях. Слід врахувати, однак, що далеко не всі вони відносяться до числа розв'язаних у сучасній математиці. Це живий розділ математичної логіки, який розвивається в теперішній час. Тому для викладу відповідного матеріалу вчитель повинен досить впевнено володіти цим розділом математики. Значно легше зупинитися на історії відкриття незчисленних множин, доведенні існування ірраціональних і трансцендентних чисел (порівнюючи доведення Кантора і Ліувілля), потужності множини точок одиничного квадрату і на аналогічних питаннях.

«*Елементи комбінаторики і теорії імовірності*» (*X клас*). Роль історичних відомостей тут дуже велика — настільки, що всю тему можна побудувати в історичному плані. Можна зробити акцент на практичну важливість статистичної обробки інформації (статистика числа народжень і смерті, діяльність страхових товариств), перших спроб розвитку теорії імовірностей як відображення запитів розвитку суспільства, значення азартних ігор як найпростішої математичної моделі, на якій відшліфовувалися основні поняття теорії імовір-

ностей. Як фінал такої побудови курсу можна розповісти про сучасні методи контролю якості виробів.

«Комплексні числа і многочлени» (X клас). Історичний аспект даної теми пов'язаний перш за все з ідеєю послідовної побудови числової системи. На цій основі можна розгорнути повчальну картину подій, яка тривала понад три тисячі років, що охопила багато народів і країн. Можна розповісти про те, як поступово проходило пізнання нових числових галузей у зв'язку з розвитком теорії і знаходження сфери застосування. Можна зупинитися і на окремих більш спеціальних питаннях, даючи їм історичне висвітлення: розвиток техніки виконання арифметичних операцій з комплексними числами; розв'язування рівнянь у радикалах; геометрична інтерпретація комплексних чисел. Корисно розповісти про значення комплексних чисел у розвитку математичного апарату ряду розділів фізики.

Прикладна спрямованість факультативного курсу математики. Найважливішою особливістю факультативних занять з математики є їх спрямованість в бік застосувань математики. Це відноситься не тільки до тем курсу «Математика в застосуваннях», де вивчення застосувань, проведення практичних робіт передбачено програмою. Під час вивчення всіх тем курсу «Вибрані питання математики» необхідно передбачити обговорення того значення, яке вони мають в різних галузях науки і виробництва. Наведемо прості приклади: двійковий суматор («Системи числення»), схема перемикання («Елементи математичної логіки»), уявні числа в аеродинаміці і теорії електричних кіл («Комплексні числа і многочлени»). Найбільші (вірніше ті, які можна найбільш просто реалізувати в умовах шкільного викладання) можливості для ілюстрації прикладного значення математики має тема «Диференціальні рівняння (див., наприклад [50]).

Відмітимо, що прикладний аспект математики виявляється не тільки в процесі вивчення цілої теми або великого її розділу. Часто він пов'язаний з невеликим колом понять або навіть з окремим поняттям. Наприклад, можна навести цікаві застосування чисел Фібоначчі до різних прикладних питань: зросту дерева, розмноженню деяких видів тварин, складання програми телепередач і ін. (див. [49, с. 326]).

Практичні роботи. До програми розділу «Математика в застосуваннях» включені практичні роботи з кожної теми. Ця форма занять в найбільшій мірі наближає процес навчання в школі з різними застосуваннями знань на практиці. Для проведення практичних робіт учитель складає інструкцію, в якій треба визначити цілі практичної роботи, завдання для учнів, порядок роботи. Завдання корисно підбирати диференційовано, а під час проведення підсумків показати результати діяльності всієї групи як цілого.

Як приклад розглянемо практичну роботу з теми «Многогранники» (X клас, практична робота № 2). При підготовці інструкції (побудова проекцій, розгорток і моделей правильних і напівправильних многогранників) треба передбачити складання ескіза, перевірку його вчителем, виконання креслення за ескізом і виготовлення по ньому розгор-

ток і моделей призм, пірамід і т. д. (докладні рекомендації є в [7]). Кожен член факультативної групи працює при цьому самостійно; для виготовлення моделей складніших за формою многогранників доцільно використати групову (3—4 учня в групі) форму виконання завдання. Ця форма корисна у відношенні набуття навичок колективної роботи (див. § 3, п. 1.1). Перед виконанням завдання можна заслухати повідомлення про основні види правильних і напівправильних многогранників.

Перед виконанням лабораторної роботи «Метод ітерації» за темою «Послідовності і рівняння» (X клас) учні можуть познайомитися з методом послідовних наближень і його застосуванням до розв'язування рівнянь (див. [9]), після чого їм пропонують завдання для самостійного розв'язування рівнянь та їх систем.

2.5. Методи навчання на факультативних заняттях. При виборі методів і прийомів навчання на факультативних заняттях необхідно враховувати зміст факультативного курсу, рівень розвитку і підготовленості учнів, їх інтерес до тих чи інших розділів програми. Одна з найголовніших вимог до методів полягає в активізації мислення учнів, розвитку самостійності в різних формах її прояву.

Як і в роботі з математичними класами, на факультативах можна використовувати різні форми і методи проведення занять: лекції, практичні роботи, обговорення завдань з додаткової літератури, доповіді учнів, складання рефератів, екскурсії. Розглянемо деякі з них.

Частину матеріалу можна викласти **лекційно**, особливо при його синтезі і узагальненні. Мета вчителя — показати, як здійснювати подібну організацію матеріалу: деякі подробиці доведень можна опустити, із означень навести тільки найголовніші, але конкретні методи розв'язування задач викласти в такому вигляді, щоб можна було чітко простежити хід розв'язання. Такі лекції корисно проводити з матеріалу, в якому приділяється велика увага відпрацюванню навичок. Наприклад, у темі «Функції і графіки» таким є матеріал, що стосується поняття асимптоти.

Інший тип лекцій використовується, коли метою є не систематизація навичок, а загальний розвиток школярів, наприклад у відношенні розуміння прикладного значення математики. Тут важливо виділити не методи розв'язування окремих типів задач, а ідеї, які є основою для них, або ж самі методи, але в узагальненій формі. У таких лекціях велике місце займають історія, приклади з сучасного життя і виробництва. Приклади: теорія імовірностей в нашому житті — в темі «Теорія імовірностей і елементи комбінаторики»; для чого потрібні комплексні числа — в темі «Комплексні числа і многочлени».

Під час проведення лекції можливі бесіди з учнями, обговорення питань, які виникають у процесі розповіді, постановка задач і ін.

Корисна форма роботи — підготовка учнями **рефератів**. Виконання таких завдань важливо перш за все у відношенні розвитку навичок самоосвіти, задоволення індивідуальних інтересів учнів. Одночасно індивідуальне завдання повинно мати цінність для всіх учасників факультативної групи. Слід прагнути до того, щоб підготовлені доповіді

заслуховувалися і обговорювалися. До підготовки доповіді можна залучати декількох учнів, які завчасно її вивчили. Вони можуть виконувати роль асистентів лектора або його опонентів.

Для рефератів треба підбирати теми, з яких є легкодоступні джерела. Найбільше поширення одержав журнал «Квант», є й багато інших можливостей (див. літературні вказівки в § 1, п. 5.7). Наведемо приклади тем рефератів з зазначенням літератури, рекомендованої для учня: «Операції над множинами» ([10], Квант, 1973, № 7, с. 2); «Числа Фобіначчі» ([15, 49], Квант, 1979, № 5, с. 73); «Правильні многогранники» ([7], Квант, 1973, № 5, с. 26; «Математика в школе», 1979, № 3, с. 73). План реферату учні можуть скласти самостійно, а потім його перевірити і дати рекомендації щодо роботи з літературою.

Дуже велике значення для успішного засвоєння матеріалу має **підбір задач.** Вступні задачі на факультативних заняттях мають на меті включення учнів у самостійну творчу роботу, інколи вчитель може навмисно подати задачу, яка може поставити учнів у тупик. Наприклад, перед вивченням теорії рядів на факультативних заняттях у X класі можна обговорити різні способи «обчислення суми» ряду $1 - 1 + 1 - \ldots$, :

а) $S = (1-1) + (1-1) + \cdots = 0$;

б) $S = 1 - (1-1) - (1-1) - \cdots = 1$;

в) $S = 1 - (1 - 1 + 1 - \cdots) = 1 - S \Rightarrow S = \frac{1}{2}$.

☞ Цей парадоксальний результат [32, с. 54] є привід для введення сучасного означення суми ряду і розвитку техніки дій зі збіжними рядами.

Слід передбачити також у необхідних місцях виклад проблемних задач, цикли для самостійного розв'язування, задачі для закріплення і формування навичок, задачі на дослідження.

Час, що виділений програмою для розв'язування задач підвищеної складності (11 г), можна розподілити протягом усього навчального року. Більш складні задачі можна розглянути на заключних заняттях з тих чи інших тем. На цих же заняттях доцільно ознайомити школярів з програмами вступних екзаменів і особливостями навчання у вузах.

Коротенько зупинимося на використанні **наочних і технічних засобів навчання** на факультативних заняттях. У більшості випадків такі засоби дозволяють активізувати пізнавальну діяльність, не говорячи про те, що деякі види технічних засобів (наприклад, застосування кінофрагментів) мають виключно великі можливості наочного показу матеріалу навчання. При вивченні деяких тем можна скористатися діафільмами, наприклад: «Лічильна техніка» до теми «Системи числення», «Перетворення графіків функцій» до теми «Функції і графіки», «Геометричне зображення комплексних чисел» до теми «Комплексні числа і многочлени».

Факультативні заняття повинні бути цікавими, захоплюючими для школярів. Ось що пише про популяризацію науки Я. І. Перельман: «...немає сумніву, наука нескінченно цікава, — але для кого? Для того, хто в неї заглибився, хто оволодів її методом, а не для того, хто стоїть лише перед її дверима. Популяризатор не може покладати надії

на захопленість самого предмету і звільнити себе від турбот про підтримку уваги свого читача» (Неделя, 1968 № 15). Добре відомо, що цікавий виклад допомагає розкрити зміст складних наукових понять і проблем. Цікавість допоможе школярам освоїти факультативний курс, ідеї і методи математичної науки, які містяться в ньому, логіку і прийоми творчої діяльності. У цьому відношенні мета вчителя — домогтися розуміння учнями того, що вони підготовлені до роботи над складними проблемами, однак для цього необхідні зацікавленість предметом, працьовитість, оволодіння навичками організації своєї роботи.

§ 3. ПОЗАКЛАСНА І ПОЗАШКІЛЬНА РОБОТА З МАТЕМАТИКИ

Математичні школи і факультативні заняття з математики мають своїм завданням поглиблення математичних знань школярів, які вже визначили основне коло своїх навчальних інтересів. Однак у V—VII і навіть у VIII—IX класах інтереси учнів рідко бувають настільки чіткими і стійкими, щоб вони самостійно змогли назвати їх з повною визначеністю. Враховуючи, що потреба в спеціалістах, які володіють математикою, зараз досить велика, необхідно формувати відповідний інтерес ще в школі.

На уроках математики є чимало можливостей зацікавити школярів змістом цієї науки. Разом з тим основна мета уроків все таки полягає у навчанні певному комплексу процедур математичного характеру; цікавість викладу підкорена цій меті; розвиток здібностей учнів відбувається в межах вивчення обов'язкового матеріалу.

Додаткові можливості для розвитку здібностей учнів і виховання у них інтересу до математики та її застосувань надають різні форми позакласних і позашкільних занять з математики. Таке розширення відбувається ніби само собою, як результат інтересу, що виник до предмету, вихованої в процесі навчання наполегливості і як наслідок виявленої легкості математики.

Нерідко участь у позакласній роботі з математики може стати першим етапом поглибленого вивчення математики і привести до вибору факультативу з математики, до вступу в математичний клас і т.д. Нижче дамо коротку характеристику тих форм позакласної і позашкільної роботи з математики, які спрямовані в першу чергу на загальний розвиток учнів. Тому поза розглядом залишаться такі можливі форми роботи, як, наприклад, підготовка до вступних екзаменів у вузи.

3.1. Види і форми позакласної і позашкільної роботи. Існують різні форми позакласної і позашкільної роботи з математики, вони до подробиць висвітлені в численній педагогічній і методичній літературі. Їх можна систематизувати таким чином: 1) позакласна робота; 2) позашкільна робота; 3) заочна робота. Зупинимося на короткій характеристиці.

1. Позакласна робота. Вона проводиться вчителем з своїми учнями. Може бути використана одна або кілька конкретних форм: математичний гурток, тиждень або місячник математики, математичні вечори, математичний ранок; різні змагання, ігри, вікторини,

конкурси, командні змагання; шкільні олімпіади з математики; шкільні і класні математичні газети; клуби веселих математиків; математичні екскурсії і кіноекскурсії; позакласне читання науково-популярної математичної літератури; шкільні наукові конференції; підготовка учнями доповідей, рефератів і творів з математики, її історії і застосувань; виготовлення математичних моделей; літні завдання з математики і ін.

Зазначені форми роботи часто перетинаються, і тому важко провести між ними різні межі. Більш того, елементи багатьох форм можуть бути використані при організації роботи в основному з будь-якої однієї з них. Наприклад, під час проведення математичного вечора можна використати змагання, конкурси, доповіді і т. д.

Однією з поширених форм позакласної роботи є математичний гурток. Питання організації, змісту і методики його роботи достатньо повно висвітлено в методичній літературі. Тут можна знайти рекомендації, що стосуються побудови занять, перелік тематики і бібліографію джерел, домашні і творчі завдання для членів гуртка і т. п.

У роботі математичних гуртків можна виділити два напрями. Перший в основному орієнтований на розвиток мислення і формування початкового інтересу до математики, другий — на поглиблення знань з математики і паралельно з цим дальшу роботу по розвитку мислення. Перший напрям є провідним на початку роботи гуртка (V—VII класи), другий — на наступних етапах (VIII—IX класи). У роботі математичного гуртка велике значення має цікавість матеріалу і систематичність його викладу. Цікавість підвищує інтерес до предмету і сприяє розумінню важливої ідеї: математика оточує нас, вона є скрізь. Систематичність викладу матеріалу може бути спрямована на загальний розумовий розвиток учнів.

Кожна з форм позакласної роботи має свої особливо цінні якості. Математичні змагання, наприклад, привабливі тим, що в них намагаються взяти участь майже всі учні. Це вчитель може використати як для підвищення інтересу до математики, так і для організації колективної розумової діяльності учнів. Останнє ми вважаємо особливо істотним, оскільки у вивченні математики потреба в об'єднанні зусиль декількох рівноправних учасників зустрічається рідко.

Під час проведення змагань учасники розбиваються на команди, які ведуть боротьбу за найшвидше і доброякісне виконання завдання. Приклади завдань, орієнтованих на колективне їх виконання:

Приклад 1. Подається модель, складена з декількох частин, наприклад розбірний куб або геометрична фігура. Потім обом командам дають по комплекту деталей, з яких вони повинні скласти цю модель як можна найшвидше. Як правило, виграє та команда, учасники якої можуть краще організуватися, ефективно об'єднають свої зусилля. Перед початком змагань учитель повинен звернути увагу дітей на цей момент.

Приклад 2. Учитель або заздалегідь підготовлений учень показує фокус на відгадування задуманого числа в межах від 0 до 15. Достатньо сказати, в яких з чотирьох таблиць воно знаходиться, і ведучий відразу назве його.

1 3 5 7 9 11 13 15	2 3 6 7 10 11 14 15	4 5 6 7 12 13 14 15	8 9 10 11 12 13 14 15

Для відгадування числа треба скласти перші числа з названих таблиць. Відгадка фокуса — у властивостях двійкової системи числення. Повне обгрунтування суті цього «фокуса» учні V—VI класів, природно, дати не зможуть, тут можна тільки відмітити найбільш енергійну команду. Підводячи підсумки змагання, учитель може відмітити, що для пояснення фокуса доводиться використати глибокі теоретичні відомості про записи чисел; у зв'язку з цим доцільна невелика бесіда з історії цього питання.

Корисною формою позакласної роботи є також стінна математична газета. Важливо, щоб вона була дійовою, тобто, щоб матеріали, які в ній висвітлюються, використовувалися активно. Добре, коли частина матеріалів у газеті являє собою навчальний процес для усього класу (наприклад, наводяться зразки варіантів найближчої перевірної роботи), друга частина грунтується на нещодавно пройденому в класі матеріалі, поглиблюючи його в певному відношенні (наприклад, наводяться відомості з історії або застосувань), і, нарешті, є цікаві задачі, задачі підвищеної складності, з яких систематично проводяться конкурси розв'язків.

Важливе місце в позакласній роботі з математики може зайняти виготовлення учнями різних моделей і наочних посібників. Цей вид роботи має велике виховне значення, крім того, в процесі виготовлення цих посібників учні можуть поєднати вивчення математики з виробленням трудових навичок. Бажано, щоб підготовлені моделі і посібники використовувалися у навчальному процесі.

Для вчителя буде корисною книга Є. А. Дишінського «Ігротека математичного гуртка», в якій подано описи декількох саморобних ігор на математичній основі.

Різноманітну інформацію про позакласну роботу, освітлення передового досвіду і деякі матеріали для її проведення вчитель може знайти у відповідних розділах журналу «Математика в школе».

2. Позашкільна робота. Форми позашкільної роботи з математики теж досить різноманітні: математичні гуртки при вузах і Палацах піонерів; товариства юних математиків; юнацькі математичні школи (ЮМШ), вечірні математичні школи (ВМШ), літні математичні школи і табори; математичні олімпіади та районні і міські конференції школярів, зльоти юних математиків і ін.

Позашкільна робота проводиться, як правило, викладачами і студентами вузів, працівниками управлінь народної освіти і окремими ентузіастами. Вона розрахована в основному на дітей, які вже захоплені математикою. Завдання, які пропонують на позашкільних заняттях, звичайно досить важкі і часто присвячені поняттям і методам, що виходять за межі шкільного курсу. Наприклад, популярними темами позашкільних занять є поглиблене вивчення подільності цілих чисел, принцип Діріхле, теорія трикутника. Нерідко на заняттях

розглядають і складні, глибокі поняття сучасної математики, такі, як поняття алгоритма (в одній із своїх строгих форм, наприклад машини Тьюрінга).

Далеко не кожний учень, який успішно справляється з шкільним курсом, може швидко, сходу розібратися в такому матеріалі. Тому соромливим або надзвичайно самолюбивим дітям доводиться нелегко. Не завжди у них вистачає сміливості задати питання, попросити необхідної допомоги. Учитель повинен мати це на увазі і відповідним чином підготовлювати тих учнів, яким він буде радити відвідувати такі заняття.

В зв'язку з тим, що позашкільна робота орієнтована на дітей, які виявили свій інтерес до математики, основна її спрямованість дещо відрізняється від спрямованості позакласної роботи. Поряд з завданням розвитку мислення на матеріалі математики тут істотно враховуються і завдання розвитку математичних здібностей і поглиблення знань з математики. Як правило, позашкільна робота з математики розрахована на учнів VII—XI класів.

Однією з самих популярних форм позашкільної роботи з математики є математичні олімпіади. Питання їх організації і проведення досить грунтовно висвітлені в посібнику для вчителів [41]. У районних турах беруть участь учні, які успішно пройшли шкільні олімпіади, однак з метою підвищення масовості допускаються всі бажаючі. Досить цінним є й те, що учні приносять з олімпіад задачі і обговорюють у класі. Добре, коли вчитель бере участь у цьому обговоренні. Можливо, не завжди він зможе знайти шлях до розв'язання — деякі з олімпіадних задач важкі для математика будь-якого рангу, але можна висловити міркування відносно розв'язань, які пропонують учні. Корисно випустити газету з задачами олімпіади і їх розв'язаннями.

Учні, які спеціально готувалися до олімпіади, виступлять на ній успішніше. Є збірники олімпіадних задач, за якими можна організувати таку підготовку на гуртових або індивідуальних заняттях.

3. Заочна робота. Заочна робота з школярами з математики ще не набула такої масовості, як позакласна і позашкільна робота. Форми її проведення теж менш різноманітні: заочні математичні школи; заочні олімпіади; конкурси з розв'язування задач. Конкурси з розв'язування задачі підвищеної складності систематично проводяться журналами «Математика в школе», «Квант», республіканськими науково-методичними журналами з цікавої і популярної математики, деякими дитячими і науково-популярними журналами («Пионер», «Мурзилка», «Наука и жизнь» і ін.); практикують також телевізійні конкурси.

У заочній роботі передбачається зворотний зв'язок з її учасниками — їх відповіді рецензуються і розсилаються. Заочні математичні школи мають цілу систему завдань, розрахованих на систематичне їх виконання. Школярі можуть брати участь у заочній роботі без будь-яких контактів з своїм учителем математики. Разом з тим учитель може знайти в матеріалах для заочної роботи багато корисного для підвищення інтересу учнів до математики і для проведення позакласної роботи.

Це стосується перш за все задачного матеріалу, зібраного на сторінках відповідних рубрик журналів. Нерідко задачі, запропоновані в одному номері, присвячені розгортанню якоїсь теми (наприклад, симетрії, алгоритмів, класифікації; остання тема характерна для розділу «Психологический практикум» у журналі «Наука и жизнь»), тоді відповідний матеріал можна прийняти за основу заняття гуртка.

Учитель може заохочувати учнів до проведення індивідуальної роботи з математики, звертаючи їх увагу на цікаві задачі, статті, які з'являються в доступних для них виданнях.

3.2. Деякі типи завдань для розвитку мислення. Розвиток мислення учнів — одна з провідних цілей позакласної роботи. Систему роботи, особливо в V—VI класах, слід будувати з урахуванням активізації мислення школярів. Ряд прийомів розумової діяльності зручно розвивати на матеріалі математики (класифікація, знаходження і виконання алгоритмів, пошук закономірності і т. д., див. [11]).

Кожний такий прийом може стати ідейною основою одного або декількох занять, а система таких прийомів — стержнем усієї діяльності гуртка. Подібну організацію гурткових занять можна знайти в [24], багато корисного містять книги Д. Пойа «Математика и правдоподобные рассуждения» і «Математическое открытие». В умовах гурткової роботи прийоми, про які ми говоримо, з'являються в розвитку, виділенні із складної, цікавої ситуації, де на перший погляд немає ніяких підстав для застосування математики. У таких ситуаціях можна показати прикладний аспект цієї науки.

У певній мірі те, про що тут говорилось, має відношення і до позашкільної роботи. Однак тут є підстави передбачати більшу зацікавленість школярів математикою і сформованість їх інтересів.

Наведемо приклади завдань, спрямованих на активізацію розумових дій і пов'язаних з ними математичних понять.

Приклад 1. Знаходження однієї або кількох ознак, якими одна група предметів відрізняється від іншої. Цей тип завдань характерний для однієї з нових галузей кібернетики — теорії розпізнавання образів. Він пов'язаний операцією **класифікації**. Ось одне з конкретних завдань, які розвивають навички класифікації: вказати, якою властивістю ліва група картинок відрізняється від правої (рис. 91).

Після аналізу однієї або кількох цікавих задач можна розповісти дещо про класифікації при вивченні математики в школі (класифікація трикутників, дробів і т. д.). Якщо тема «Класифікація» входить до програми занять гуртка для VIII або IX класів, то можна використати і досить серйозні теоретичні відомості, наприклад про зв'язок класифікації з поняттям відношення, про класифікацію цілих чисел за властивістю подільності на фіксоване число (арифметика лишків).

Приклад 2. Побудова об'єкта за вихідними даними і описом допустимих дій. Цей тип завдань пов'язаний з поняттям алгоритму. Його реалізують у багатьох математичних іграх, наприклад «Хрестики і нолики», «15», «Кубик Рубика». Типовий приклад — гра «Ханойская башня» (див. [25, с. 70—71]). В процесі розв'язування цієї задачі корисно запропонувати учням виготовити відповідну модель і пограти в неї. Для цього зручно використати дитячі розбірні піраміди.

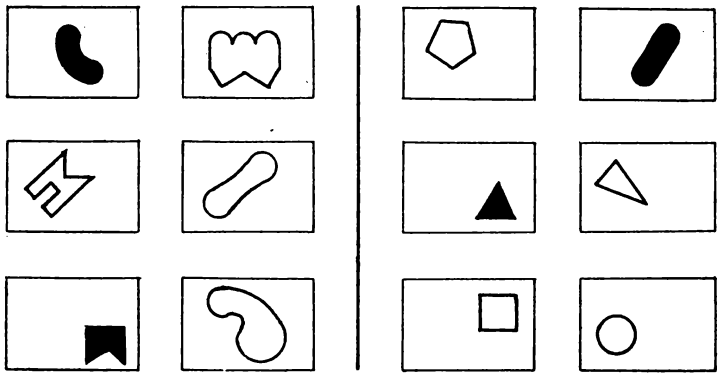


Рис. 91

Ось ще приклад, який відноситься до такого ж типу, але простіший: «Шість п'ятаків лежать гербами вгору. Дозволяється за один раз перекинути будь-які п'ять з них. Чи можна за кілька разів перекинути будь-які п'ять з них. Чи можна за кілька разів перекинути всі п'ятаки гербами вниз?»

Для розв'язання зручно використати угоду: будемо п'ятак, що лежить гербом вгору, позначати «+», а гербом вниз «—». Тоді задача зводиться до такої: від послідовності +++++++ перейти до ——————, якщо дозволяється виконати таку дію: із шести знаків п'ять замінити протилежними, тобто поміняти місцями «+» і «—».

Ця задача допускає розгортання у невеликий цикл, в процесі дослідження якого аналізується залежність розв'язку від кількості даних монет. Загальна задача формулюється так: «Дано k п'ятаків. За один хід перекидаються (k — 1) із них. На початку вони лежать всі гербами вгору. Чи можна за кілька ходів перекинути всі п'ятаки гербами вниз?»

Виявляється, що для парного числа п'ятаків це завжди можливо, для непарного — неможливо. Дійсно, легко показати, що парність, кількості знаків «+» у першому випадку за кожний хід змінюється, а в другому — ні. Після кожного ходу залишається непарне число«+», його ніколи не можна зробити рівним нулеві, що відповідало б розміщенню п'ятаків гербами вниз.

У цьому розв'язку використовується метод, характерний для розв'язування задач, у яких треба довести неможливість певного положення: знаходять властивість, яка не змінюється в процесі перетворень, і показують, що вона різна для даного положення і того, яке треба одолати. Така властивість називається **інваріантом**. Метод пошуку інваріанта — один з самих важливих у математиці, він може бути засвоєний за допомогою задач, що пов'язані з побудовою алгоритмів, точніше, з доведенням неіснування деякого алгоритму. Однак цю тему, очевидно, слід відкласти до VIII—IX класів; у позакласній роботі з учнями V—VI класів треба обмежитися задачами, які приводять до знаходження алгоритму.

Приклад 3. Конструювання об'єкта з необхідними властивостями. Під час розв'язування задач часто доводиться виконувати дії, пов'язані (в умі) з побудовою тих об'єктів, по відношенню до яких і формулюється відповідь; таким чином, побудова об'єктів — проміжний етап розв'язування задачі. Часто такі задачі виникають на матеріалі комбінаторики.

Наведемо ще один приклад такого типу: «Троє поросят хочуть побудувати будинок. Вони ще не вирішили, буде в ньому піч чи камін, чим покрити будинок — соломою чи черепицею — і які в будинку зробити двері — дубові чи з простої фанери. Скільки різних будиночків вони можуть побудувати?»

Для розв'язання зручніше всього подати процес побудови реального будиночка, точніше, послідовність зазначених у задачі операцій. Потім можна графічно подати цей процес у вигляді дерева логічних можливостей, з якого відповідь одержуємо простим підрахунком.

Мета цієї задачі, звичайно, не в тому, щоб одержати відповідь, а в тому, щоб її *проаналізувати з точки зору організації даних в процесі розв'язування*. Результати аналізу слід закріпити за допомогою задач в аналогічним ідейним змістом.

Приклад 4. Аналіз структури даних. Завдання цього типу спрямовані на розвиток в учнів здібності до систематизації і впорядкування тих відомостей, які даються в умові. Подібні завдання можна пропонувати на різноманітному матеріалі. Інколи вони використовуються при введенні нового поняття. Наприклад, розглянемо таке питання: «Який квадратик на рисунку треба зафарбувати, щоб зображена фігура виявилась складеною з двох однакових частин?» (рис. 92).

Внаслідок обговорення і уточнення відповідей учнів можна прийти до виявлення тих завдань, які є основою поняття осьової симетрії.

У позакласній роботі нові поняття вводяться рідко (в крайньому разі в V і VI класах, де робота в напрямку, що тут розглядається, особливо важлива), систематизація даних проводиться з залученням уже знайомих дітям понять. Тут, як ми вже говорили, робота в напрямі розвитку мислення і, зокрема, розвитку навичок і прийомів систематизації даних має велике значення сама по собі, безвідносно до математичного змісту завдань, які пропонуються для дослідження. Тому і задачі, спрямовані на розвиток навичок систе-

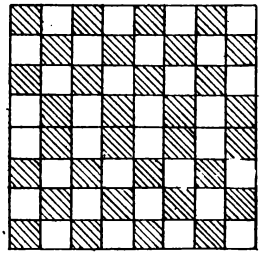


Рис. 92

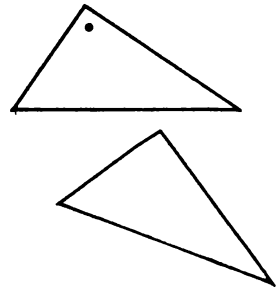


Рис. 93

матизації, слід давати різноманітні. Наприклад, на одному й тому ж занятті гуртка в VI класі можна дати такі задачі:

1. Відгадати закон утворення членів послідовності: а) 1; 12; 123; 1234; 12345; б) 2; 5; 8; 11; 14.

2. Всередині трикутника відмічена точка, а потім його перенесли в інше місце. Допоможіть знайти положення відміченої точки (рис. 93).

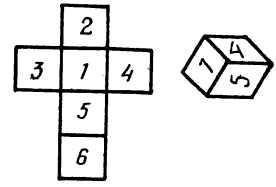


Рис. 94

3. Кубик, на грані якого нанесені цифри, склеєно з розгортки, яку показано на рис. 94. Частина граней невидима. Визначити, які числа нанесені на кожну з граней.

Наведеними прикладами, звичайно, не вичерпуються типи завдань, спрямовані на розвиток розумової діяльності. Ми не торкались, наприклад, такої теми, як «Розвиток логічного мислення». Різноманітні цікаві задачі, присвячені їй, можна знайти в книзі Г. Бизама, Я. Герцега «Игра и логика». Зроблена спроба систематизувати задачі, що зв'язані з розвитком мислення на матеріалі математики [11].

Під час проведення позакласної роботи є можливості розвитку зорового сприйняття школярів. При цьому можна використати такі прийоми роботи, які в умовах уроку не можуть знайти широкого застосування. Наприклад, на позакласних заняттях повчально розглянути з учнями приклади оптичних ілюзій і «неможливих» просторових фігур. Широкий матеріал з цього питання є в книзі Я. І. Перельмана «Занимательная геометрия», можна порадити також книгу Дж. Грегорі «Глаз и мозг».

У процесі використання в роботі гуртка матеріалів такого роду необхідно роз'яснити учням, що в звичайних умовах зору можна цілком довіряти, але його слід також і тренувати, оскільки він дає людині найбільшу частину інформації про зовнішній, реальний світ. Приклади на оптичні ілюзії не самоціль; їх показ повинен проводитися у загальному потоці завдань, спрямованих на розвиток зорового сприйняття; основна маса завдань тут може відноситися до таких тем, як «Виділення або підрахунок фігур на замаскованому фоні», «Особливості зв'язку предмета і його зображення» і т. д.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Алгебра*: Учеб. пособие для X—XI классов средних школ с мат. специализацией / Н. Я. Виленкин и др. М.: Просвещение, 1972.
2. *Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И.* Начала стереометрии, 9 класс. М.: Просвещение. 1981; Начала стереометрии, 10 класс. 1982.
3. *Балк М. Б., Балк Г. Д.* Математика после уроков. М.: Просвещение, 1971.
4. *Балк М. Б.* Организация и содержание внеклассных занятий по математике. М.: Просвещение, 1956.
5. *Басова Л. А., Шубин М. А., Эпштейн Л. А.* Лекции и задачи по математике: Из опыта работы летней физико-математической школы в Карелии. М.: Просвещение, 1981.
6. *Башмаков М. И., Беккер Б. М., Гольховой В. М.* Задачи по математическому анализу. М.: Наука, 1982.
7. *Веннинджер М.* Модели многогранников. М.: Мир, 1974.
8. *Барр Ст.* Россыпи головоломок / Под ред. И. М. Яглома. М.: Мир, 1987.

9. *Виленкин Н. Я.* Функции в природе и технике. Книга для внеклассного чтения для IX—X классов. М.: Просвещение, 1978.
10. *Виленкин Н. Я.* Метод последовательных приближений. М.: Наука, 1974.
11. *Виленкин Н. Я.* Рассказы о множествах. М.: Просвещение, 1972.
12. *Виленкин Н. Я., Блох А. Я.* О развитии логических и творческих способностей школьников при изучении математики // Заочное обучение математике школьников VIII—X классов. Изд. НИИ СиМО, 1982.
13. *Виленкин Н. Я., Шварцбурд С. И.* Математический анализ: Учеб. пособие для IX—X классов средних школ с математической специализацией. М.: Просвещение, 1973.
14. *Виленкин Н. Я., Ивашев-Мусатов О. С., Шварцбурд С. И.* Алгебра и математический анализ, 9 класс: Учеб. пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением курса математики. М.: Просвещение, 1983.
15. *Внеклассная* работа по математике в IV—V классах / Под ред. С. И. Шварцбурда. М.: Просвещение, 1974.
16. *Вробьев Н. Н.* Числа Фибоначчи. М.: Наука, 1969.
17. *Всесоюзная* конференция «Опыт проведения факультативных занятий по основам наук в средней школе» // Математика в школе. 1972. № 1.
18. *Гайштут А. Г.* Математика в логических упражнениях. К.: Рад. шк. 1985.
19. *Гарднер М.* Крестики-нолики. М.: Мир, 1988.
20. *Гарднер М.* Есть идея. М.: Мир, 1982.
21. *Галицкий М. Л., Мошкович М. М., Шварцбурд С. И.* Планирование учебного материала для X класса с углубленным изучением математики. М., 1982.
22. *Глейзер Г. И.* История математики в школе (IV—VI кл). М.: Просвещение, 1981.
23. *Глейзер Г. И.* История математики в школе (VII—VIII кл.). М.: Просвещение, 1982.
24. *Глейзер Г. И.* История математики в школе. М.: Просвещение, 1983.
25. *Гнеденко Б. В.* Математика в современном мире: Книга для внеклассного чтения VII—X классов. М.: Просвещение, 1980.
26. *Гусев В. А., Орлов А. И., Розенталь В. Л.* Внеклассная работа по математике в VI—VIII классах. М.: Просвещение, 1984.
27. *Доморяд А. П.* Математические игры и развлечения. М., 1961.
28. *Жовнір Я. М., Рябчинська В. Д.* Показникові і логарифмічні рівняння та нерівності // У світі математики. Вип. 7. К.: Рад. шк. 1976.
29. *Жовнір Я. М., Наумов І. О.* Розв'язування позиційних задач у курсі стереометрії // У світі математики. Вип. 10. К.: Рад. шк. 1979.
30. *Жовнир Я. М., Рябчинская В. Д.* Углубленное повторение некоторых разделов алгебры на алгоритмической основе. К.: Вища шк. 1987.
31. *Заочные* математические олимпиады / Н. Б. Васильев и др. М.: Наука, 1981.
32. *Земляков А. Н.* Примерное тематическое планирование факультативного курса «Математика в приложениях» // Математика в школе. 1981. № 3.
33. *Зубелевич Г. И.* Занятия математического кружка в IV классе. М., 1980.
34. *Калужнин Л. А., Сушенский В. И.* Преобразования и подстановки. М.: Наука, 1979.
35. *Коба В. І., Хмура О. О.* Позакласна робота з математики в школі. К.: Рад. шк. 1968.
36. *Конфорович А. Г.* Математичні софізми і парадокси. К.: Рад. шк. 1983.
37. *Конфорович А. Г.* Математика лабиринта. К.: Рад. шк. 1987.
38. *Конфорович А. Г.* Добрий день, Архімеде. К.: Молодь, 1988.
39. *Коба В. І., Чуб О. Т., Нікулін М. А.* Бесіди про рівняння. К.: Рад. шк. 1986.
40. *Конфорович А. Г.* Колумби математики. К.: Рад. шк. 1982.
41. *Маланюк М. П., Лукавецкий В. И.* Олимпиады юных математиков: Пособие для учителей. К.: Рад. шк., 1985.
42. *Маркушевич А. И.* Ряды. Элементарный очерк. М.: Наука, 1979.
43. *Математика:* Посібник для факультативних занять у 7 класі / За ред. Г. П. Бевза. К.: Рад. шк. 1982.
44. *Линейная* алгебра и геометрия / Сост. С. И. Шварцбурд. М.: Просвещение, 1967.

45. *Математический* анализ и алгебра / Сост. С. И. Шварцбурд. М.: Просвещение, 1967.
46. Математика и естествознание / Сост. С. И. Шварцбурд. М.: Просвещение, 1969.
47. *Методика* преподавания математики в средней школе: Общая методика / Ю. М. Колягин и др. М.: Просвещение, 1980.
48. *Методика* факультативных занятий в VII—VIII классах: Избранные вопросы математики / Сост. И. Л. Никольская, В. В. Фирсов. М.: Просвещение, 1981.
49. *Методика* факультативных занятий в IX—X классах: Избранные вопросы математики / Сост. И. Л. Никольская, В. В. Фирсов. М.: Просвещение, 1983.
50. *Монахов В. М.* Проблемы дальнейшего развития факультативных занятий по математике // Математика в школе, 1981. № 6.
51. *Никофоровский В. А.* Из истории алгебры XVI — XVII вв. М.: Наука, 1979.
52. *Обучение* в математических школах / Сост. С. И. Шварцбурд, В. М. Монахов, В. Г. Ашкинузе. М.: Просвещение, 1965.
53. *Петраков И. С.* Математические олимпиады школьников. М.: Просвещение, 1982.
54. *Поисковые* задачи по математике (IV—V кл.) / А. Я. Крысин и др. М.: Просвещение, 1979.
55. *Проблемы* подготовки учителей к проведению факультативных занятий в средней школе: Тез. докл. Всесоюз. конф. М., 1980.
56. *Программа* факультативных курсов на 1980—1985 гг. // Математика в школе, 1980. № 4.
57. *Программы* школ и классов с углубленным теоретическим и практическим изучением математики (IX—X классы). М., 1974; 1980.
58. *Розов Н. Х., Глаголева Е. Г., Раббот Ж. М.* Заочная математическая школа при МГУ. М.: Знание, 1973.
59. *Саркисян А. А., Колягин Ю. М.* Познакомьтесь с топологией: Книга для внеклассного чтения VIII—X классов. М., 1976.
60. *Сивашинский И. Х.* Задачи по математике для внеклассных занятий. М.: Просвещение, 1968.
61. *Реньи А.* Трилогия в математике. М.: Мир, 1980.
62. *Сборник* задач по алгебре и началам анализа для IX—X классов / Б. М. Ивлев и др. М.: Просвещение, 1978.
63. *Смаллиан Р.* Принцесса или тигр? М.: Мир, 1985.
64. *Тихонов А. Н., Костомаров Д. П.* Рассказы о прикладной математике. М.: Наука, 1979.
65. *Углубленное* изучение алгебры и анализа / Сост. С. И. Шварцбурд, О. А. Боковнев. М.: Просвещение, 1977.
66. *У світі* математики // Зб. наук.-популяр. статей. К.: Рад. шк. Вип. 1—19 (Починаючи з 1968 р.).
67. *Факультативные* занятия в школе // Сб. статей / Под ред. М. П. Кашина и Д. А. Эпштейна. М.: Педагогика, 1973.
68. Факультативные занятия в школе: Сборник статей. М.: Педагогика, 1976. Вып. 11.
69. Факультативные занятия в школе: Сборник статей. М.: Педагогика, 1977, вып. III.
70. Факультативный курс: Избранные вопросы математики (7—8 кл. // Н. Я. Виленкин и др. М.: Просвещение, 1978.
71. Факультативный курс: Избранные вопросы математики (9 кл.) / И. Н. Антонов и др. М.: Просвещение, 1979.
72. Факультативный курс: Избранные вопросы математики (10 кл.)/ А. М. Абрамов и др. М.: Просвещение, 1980.
73. *Фирсов В. В., Боковнев О. А., Шварцбурд С. И.* Состояние и перспективы факультативных занятий по математике. М.: Просвещение, 1977.
74. *Шварцбурд С. И.* Внеклассная работа // Преподавание математики в 4—5 классах. М.: Просвещение. 1975.

Навчальний посібник

МЕТОДИКА ВИКЛАДАННЯ МАТЕМАТИКИ В СЕРЕДНІЙ ШКОЛІ

Упорядники:
ЧЕРКАСОВ Ростислав Семенович
СТОЛЯР Абрам Аронович

Переклад з російської *Жовніра Якова Михайловича*

Редактор *О. Л. Алієва*
Художник обкладинки *Ю. В. Пестов*
Художній редактор *Т. П. Короленко*
Технічний редактор *Г. П. Александрова*
Коректор *В. М. Бурейко*

Здано до складання 12.11.91. Підписано до друку 16.04.92. Формат 60×90/16. Папір газетний. Гарнітура літературна. Друк високий. Умов. друк. арк. 19. Умов. фарбо-відб. 19,25. Облік.-вид. арк. 21,7. Вид. № 2052. Зам. 1-430.

Видавництво «Основа» при Харківському державному університеті, 310005 Харків, майдан Повстання, 17.

Харківська книжкова фабрика ім. М. В. Фрунзе.
310057 Харків, вул. Донець-Захаржевського, 6/8.